Lux Mathematica.

Excussa Collisionibus

JOHANNIS WALLISII Theol. Doctoris, Geometriæ in celeberrima Academia Oxonienſi Profeſſoris Publici,

ET

THOMÆ HOBBESII Malmsburienſis.

Mukis & fulgentiſſimis aucta radiis

AUTHORE *R.R.*

Adjuncta eſt

Cenſura Doctrinæ Walliſianæ de Libra,

UNA CUM

ROSETO HOBBESII.

LONDINI:

Excudebat *J. C.* pro *Guilielmo Crook*, ad Signum Draconis viridis in vico vulgò vocato *Without Temple-bar.* 1672.

Ad Nobiliſſimos alioſque viros eruditos e Societate Regali ad Scientias promovendas inſtitutæ.

PRæſtitiſtis Philoſophiæ (viri Nobiliſſimi) ne cuiquam aut ſtudium aut nomen ejus (ſicut olim) ludibrio ſit vel inhoneſtum habeatur. Infamiam illam dignitate veſtra abſterſiſtis. Scientiarum ſtudiis Materiam & Supellectilem præbuiſtis. Societatis Corpus luce veſtra illuſtre, exteriſque gentibus conſpicuum reddidiſtis; ita ut quæ in operibus naturæ mirabilia aut nova ubicunque inventa ſint, ad Societatem veſtram potiſſimum tranſmittantur, & de cauſis eorum judicia veſtra expectentur. Ingenium ſuum a vobis unuſquiſque ſpectari & probari magni æſtimat. Vnius alteriuſve Geometræ vel Phyſici commendatione, ad ſtudium Philoſophiæ pauci excitantur. Nimirum hoc ipſum augendæ Scientiæ unum & magnum adjumentum eſt, Quod ad negotia publica nati & inſtituti, hominibus otio abundantibus ad colendam Philoſophiam animos addidiſtis, ſine quorum longo & vehemente ſtudio, neque Geometria neque Phyſica (quibus omnis Scientia Naturalis continetur) expectari poteſt. Neque vero ab illis tempore & ſtudio quantocunque

que ſine ope veſtra Scientiæ illæ tam difficiles, quarumque principia & fundamenta adeo alte defoſſa ſunt, acquiri poſſunt.

Neſcitis forte (Viri Excelſi qui hoc genere Sapientiæ neque ad gloriam neque ad quæſtum indigetis) in hominibus aliis duæ illæ res Gloria & Opes quanta pariunt certamina ingeniorum. Scitis quantis certant conviciis Philoſophi, & quam ſunt convicia Civium paci publicæ inimica. Hæc ne fiant, veſtrum eſt non certantium prohibere. Quod quidem etſi de Scriptis jam antè publicatis quam ad vos ferantur, facere impoſſibile ſit; ne recipiantur tamen, neve a vobis in Tranſactionibus ſcurrilitas ulla aut ſcomma in lucem prodeat impedire facile eſt. Quid enim hominem ingenii recti terrere a ſcribendo magis poteſt, quam obnoxium ſe fore ſcire contumeliis æmulantium. Philoſophia ut creſcat, libera eſſe debet, nec metu nec pudore coercenda. Lucem ſuam naturaliter tanquam in Silice concluſam gerit. Inde frequentibus ingeniorum colliſionibus ſcintillulæ excutiendæ ſunt, quæ foventibus vobis clariſſimè & conſtanter magna generis humani commodo & ornamento tandem collucebunt. Atque huc ſpectat hic Libellus quem vobis offero dedicoque, in quo ſurgentes ex Walliſii & Hobbeſii colliſionibus ſcintillulas vobis oſtendo; quas, ſi mereantur, veſtrum eſt fovere, & conatum Authoris æquo animo accipere qualemcunque.

Celſitudinum veſtrarum ſervus humillimus

R. R.

PRÆFATIO.

EX quo cæperunt agitari controverſiæ Mathematicæ inter Hobbeſium & Wallisium, elapſi ſunt viginti fere anni. Quæſtiones autem inter illos diſputatæ totius Geometriæ ſunt difficillimæ, & maximè πεμμάχητοι, & de quarum demonſtratione adeo hactenus deſperatum eſt, ut qui hodie unius cujuſlibet illarum demonſtrationem invenisſe ſe prædicaret, pro inſano aut ridiculè arrogante à cæteris Mathematicis haberetur. Contentioni huic occaſionem præbuit Hobbeſii liber quidam De Corpore editus ineunte anno Domini 1653, qui liber continebat inter alia, Principia aliquot Geometrica à Principiis hodie receptis diſcrepantia, & præterea demonſtrationem (ut vocabat ille) æqualitatis inter lineam quandam rectam, & quartam partem circumferentiæ Circuli. Diſplicuit pleriſque Mathematicis fiducia hæc Hobbeſii, præſertim clarioribus & Academicis, quorum fortaſſe nonnulli arbitrati ſunt difficillima quæque Geometriæ Problemata ſibi ſolis invenienda reſervari. Itaque ad evertendam demonſtrationem illam, & Hobbeſii Geometriam univerſam, edidit librum Johannes Walliſius in Academia Oxonienſi Profeſſor Geometriæ publicus, cui titulus erat Elenchus Geometriæ Hobbianæ. Ἐκ τῆσδε ἄρχεται ὁ πόλεμος. Geſtumque eſt bellum perpetuum inter illos ſine induciis Geometricum. Nihil enim fere ab altero ſcriptum eſt quod ab altero non eſt publicè oppugnatum.

Admirabar ego Propoſitiones Hobbeſii tot & tam difficiles; magis autem pertinaciam ejus, quod contra Geometrarum hujus ſeculi æſtum, atque etiam aliquando contra Euclidem & Interpretes ejus, id eſt contra ipſos Geometriæ Patres contendere non deſineret. Ex altera parte non minus admirabar (cum multis aliis) ejuſdem in doctrinarum generibus aliis tum rationum vim tum dictionis perſpicuitatem. Cogitavi ergo fieri poſſe ut viderit ille, in Principiis receptis aliquid minus accuratum quam oportuit, quodque aliorum fugerat diligentiam. Itaque cum ipſius tum Wallisii demonſtrationes quantum poſſem, decrevi diligenter legere & perpendere. Legi, examinavi, judicavi, & judicium publico, ipſe libens aliorum omnium qui Mathematicæ ſtudio delectantur, judicium ſubiturus.

Manifesta.

1. Unum *est* Ens, *sive res quæcunque, vera vel ficta, quatenus comparatur cum pluribus, vel cum numero rerum? Dicitur quoque licet impropriè,* Unitas.

2. *Numerus est plura* Una, *sive plures* Unitates. *Sic Numerum definivit Euclides; nec (si non ita definisset) aliter definiendus erat.*

Pueri autem hæc non docentur, quia doctrinæ de Definitionibus nondum sunt capaces; sed pro Uno *habent characterem ipsum, nempe hunc, 1, pro duobus hunc 2, & sic deinceps. Attamen sic quoque numeros legere, addere, substrahere, multiplicare & dividere, non judicio, sed memoria satis celeriter discunt; & postea, crescente cum ætate rerum cognitione, quoties opus est, in rerum suarum rationibus distinguunt inter Unum & Unum satis dextrè, lumine naturali. Iidem vero si quam Arithmeticam in Schola didicerunt, ad docendum uterentur, characteres istos pro rebus ipsis perpetuò forsan habituri essent.*

Viderunt hoc scriptores Algebræ cum pro Unitate supponere docuerunt Unam rem, *& arti suæ imposuerunt nomen* Cosicam *à* Cosa, *voce Italica significante* Rem; *etiam artem suam appellaverunt* Arithmeticam Speciosam, *quia supponebant pro* Unitate *aliquam rerum* Speciem, *ut numerum, lineam, planum, solidum, &c. quam multiplicabant, dividebant, addebant, detrahebantque prout problema investigandum postulabat, per numeros.*

3. Ex Uno *fit* numerus *duabus operationibus, Additione, vel Multiplicatione æqualium. Nam etiam Multiplicatio Additio est, sed æqualium; æqualium dico, quia quicquid in operatione Arithmetica pro Unitate supponitur, idem sibi æquale permanet usque ad finem operationis. Alioqui falsa est. Neque enim Additio, neque Subtractio, neque Multiplicatio, neque Divisio mutat rei numerandæ naturam aut speciem.*

Ab Uno *per Divisionem atque etiam per Subtractionem fit partium aliquotarum numerus. Divisio enim idem est quod Subtractio minoris à majore quoties fieri potest.*

4. *Manifestum ergo est, multiplicari nihil posse per Unum; nam Unum per Unum non amplius Uno facit.*

5. *Neque ergo Unitas ipsa est Numerus, sed Res sive Species numerata.*

6. *Certum etiam est, si Numerus dividatur in sua una, puta decem, per decem pedes, numerum quotientem esse pedum; & propterea idem esse inter multiplicandum vel dividendum dicere decem Unitates per decem Unitates, & simpliciter decem per decem. Etiam idem esse decem pedes multiplicare per decem pedes, & simpliciter per decem; quia multiplicatio non mutat Speciem.*

Speciem. Præterea multiplicari quicquam posse nisi per numerum, absurdum dictu est.

7. *Quando Numerus multiplicat numerum sibi æqualem, Multiplicans* Radix, *Numerus productus* Quadratus *dicitur. Ut quia 3 multiplicans 3 producit 9, Numerus 3 dicitur Radix, & Numerus 9 dicitur Quadratus. Figuram autem quadratam non efficiunt. Quanquam enim ita collocari possunt calculi 9 vel 16, &c. ut imaginem quandam in animo excitent figuræ quadratæ, non sunt tamen figura quadrata magis quam 9 vel 16 Tempora. Nec minus Numerus quadratus est centum solidi in sacculo constricti, quam super tabulam quadratam quomodocunque ordinati.*

8. *Figura quadrata fit ductu lineæ rectæ in sibi æqualem & ad angulos rectos adjacentem. Describit ergo ductus ille superficiem, id est quantitatis Speciem novam, & illa superficies ducta in aliam rectam æqualem prioribus & erectam, describit solidum, id est Speciem quantitatis tertiam & ultimam.*

Nam ultra solidum, quantitatem nullam cognoscit Geometria. Arithmeticorum enim Surdisolida, Quadrato-quadrata, Quadrato-Cubi, Cubicubi meri numeri sunt, Figuræ non sunt. Magna igitur differentia est inter id quod fit à duarum rectarum in se ductione, & id quod fit à duorum numerorum in se multiplicatione, nimirum quanta est inter lineam & superficiem, vel inter superficiem & solidum. Hæc autem specie differunt, adeo ut alterum eorum nulla multiplicatione ab altero superari possit; & proinde (ut dicit Euclides) nullam habere inter se rationem, nec comparari secundum quantitatem possint. Magna item differentia est inter Radicem numeri quadrati, & quadratæ Figuræ latus. Radix enim est numerus, & sui quadrati pars aliquota; sed latus, figuræ quadratæ pars non est. Innumera sunt quadrata quæ numeris efferri non possunt, qui numeri Radices nullas habent, sed Figuræ quadratæ omnes latera habent. Quod si dicatur Radicem in illis numeris non-quadratis satis prope accedere aliquando ad veram lateris longitudinem, nempe, si latus dividatur in partium numerum satis magnum; verum non est. Nullus enim numerus partium satis magnus est, quia quadratum dari potest, omni data magnitudine majus. Nam quod deficit 1 pede in latere 100 millium pedum, deficiet una semidiametro terræ in latere totidem semidiametrorum terræ.

9. *Multiplicatio Divisoris per Quotientem restituit divisum. Sit enim divisus 20 per 5, & Quotiens erit 4. Sed & multiplicato 5 per 4, productus erit rursus 20.*

10. *Idem etiam verum est in numeris Cosicis.*

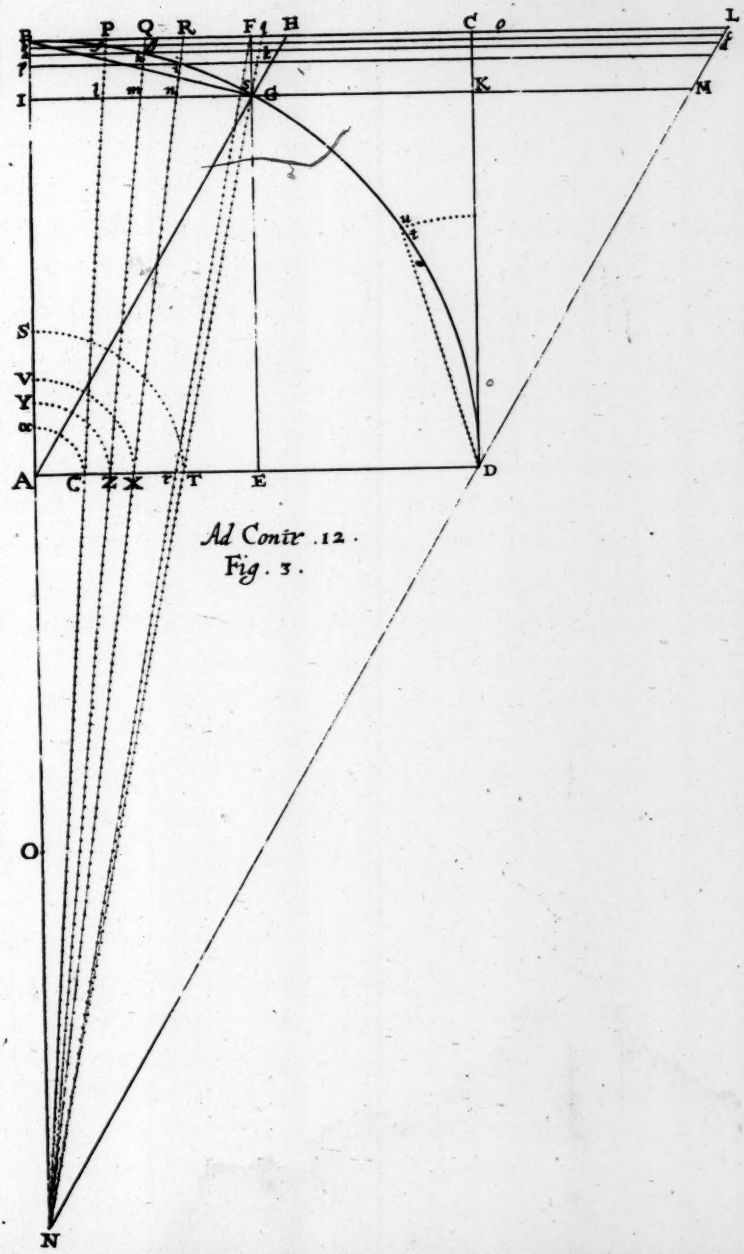
Sit enim dividendum 4 A per 1 A, certum est Quotientem esse 4 A. Ergo quia divisor multiplicans Quotientem reddit divisum 4 A, productus non erit (ut Mathematici multi putant) 4 Quadrata ab A sive 4 AA. Similiter

[illegible]iliter in [illegible] faciunt 4 A. Additio autem totidem æqualium idem [illegible]plicatio. Quare 2 A multiplicata per 2 A faciunt tantum 4 A, [illegible] quadrata ab A.

11. *Sin pro Re numerata ponatur* Unus numerus *(nam ut aliarum rerum, ita numerorum numerus est) ut quando quinque binarii & unus binarius multiplicati sunt in se, productus erit, non 5 binarii sed 10 binarii, id est quinque numeri quadrati, quorum unius cujusque radix est binarius. Cujus rei causa hæc est, Quod* binarius *etsi unus sit binarius, duæ tamen sunt* Unitates, *quæ multiplicatæ in se faciunt quatuor, numerum quadratum. Quod contingere non potest multiplicando aliud quicquam præter numerum. Itaque quinque lineæ multiplicatæ in duas, nunquam facient superficiem. Etiam universaliter falsum est ex multiplicatione longitudinum fieri posse superficiem.*

Ab his Principiis, assumpturus etiam quæ ab Euclide & veteribus demonstrata & recepta sunt, accedo ad controversiarum inter Hobbesium *&* Wallisium *Examinationem.*

CON-



Ad Contr. 12.
Fig. 3.

CONTROVERSIA I.

De Rationum calculo per magnitudines Infinitas.

Wallisius librum de Arithmetica Infinitorum ediderat, cujus propositio prima erat hæc [*Si proponatur Series quantitatum Arithmeticè proportionalium, sive juxta ordinem naturalem numerorum perpetuò crescentium à Puncto sive* 0 *(puta* 0, 1, 2, 3, 4, &c.*) propositum sit inquirere quam rationem habet earum aggregatum ad aggregatum totidem maximæ æqualium.* Concludit autem, rationem esse ut 1 ad 2. Quod verum est, nec negat *Hobbesius*.

Quod autem ab Inductione arguat, cum posset per Syllogismum, id reprehendit. Ponantur enim ordine numeri 0, 1, 2, 3, 4, & supra illos eundem ordinem sed inversum hoc modo $\frac{4}{0}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0}{4}$. Manifestum est, aggregatum ex ambobus æquale esse totidem maximis; & propterea utriusvis seriei duplum esse. Quæ probatio legitima, brevis & perspicua est. Vitium ergo erat Inductione uti, quæ (ubi particularia omnia percurri nequeunt) nec legitima est, nec brevis esse potest.

Reprehendit præterea quod paulò post subjungit, Nempe, eandem fore rationem 1 ad 2, etiamsi series illa quantitatum fuerit infinita. Primò, quia etsi propositio aliqua universaliter vera sit, id est de *Omni*, Non ob eam rem vera erit de numero Infinito. Neque enim rationem habet numeri 1 ad numerum 2, aut Rationem omnino ullam Infinitum ad finitum. Secundò, etsi Magnitudo non absurdè dici possit Infinita, propter significationem rei nondum determinatæ, ut quando quanta sit non est dictum; non tamen rectè dici potest *Infinita* quantitas. Quantitas enim omnis tanta est, id est finita; neque quisquam unquam dixit de re quacunque quod esset Infinitè tanta.

Reprehendit etiam quod *Wallisius* dixerat Infinitum Infinito alterum altero esse majus, & probare conatus sit argumento tali. Sit A B tempus

Finitum. A B Ab inſtante autem B in conſequentia tempus ſit Infinitum. Ergo ab A in conſequentia tempus erit etiam Infinitum, idemque majus quam tempus ab inſtante B in conſequentia, quantitate Finita A B.

Hujuſmodi argutiæ etſi pro demonſtrationibus valere permitterentur, non tamen ſequeretur Infinitum illud à B vel ab A in conſequentia habere ad finitam quantitatem A B rationem, aut 1 ad 2, aut aliam quamcunque, cùm Infiniti ad Finitum ratio omnino nulla ſit. Sed hujuſmodi ratiocinationes nihil valent. Siquidem enim ſimiliter argueremus ab inſtante B & ab inſtante A in præcedentia, haberemus Infinitum tum à parte antè, tum à parte poſt, quod haberet tamen duos terminos, alterum in A, alterum in B, id eſt Infinitum quod duos habet terminos.

Videre hinc eſt, quibus induere ſe difficultatibus neceſſe eſt illos qui diſputare audent de quantitate rei incomprehenſibilis, quale eſt omne genus Infiniti, ſive Temporis ſive Spatii. Itaque omnia ab hac prima ad propoſitionem decimam nonam indemonſtrata ſunt. Decima nona autem hæc eſt,

[*Si proponatur ſeries quantitatum in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum) continuè creſcentium à puncto vel* 0 *inchoatarum, puta ut* 0, 1, 4, 9, 16, *&c. propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium.*

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in Prop. 1.)]

Et erit $\begin{cases} \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}. \\ \frac{0+1+4}{1+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{4}{5} + \frac{1}{12}. \\ \frac{0+1+4+9}{3+5+5+5} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}, \text{ \& sic deinceps.} \end{cases}$

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubtripla ſeu $\frac{1}{3}$. *Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur; puta* $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$, *&c. auctо nimirum Fractionis denominatore, ſive conſequente rationis in ſingulis locis numero ſenario (ut patet) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubtriplam, ea quam habet Unitas ad ſextuplum numeri terminorum poſt* 0; *adeoque, &c.*

Examinentur. Quod $\frac{0+1}{1+1}$ (cum Fractio ſit) æqualis eſt $\frac{1}{2}$, id eſt dimidio Unitatis ſive unius Quadrati (nam ponitur 1 hoc loco pro uno quadrato) manifeſtum eſt. Verum item eſt quod $\frac{1}{3}$ æquale eſt $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{6}$ ſimul; quare & exceſſus $\frac{1}{2}$ ſupra $\frac{1}{3}$ eſt $\frac{1}{6}$.

Rurſus habeat Series tria loca $\frac{0+1+4}{1+4+4}$. Manifeſtum etiam eſt partem tertiam ordinis inferioris eſſe 4, id eſt quatuor quadrata; & aggregatum ordinis ſuperioris eſſe 5, id eſt quinque quadrata; ideoque majorem quam eſt $\frac{1}{3}$ ordinis inferioris quantum eſt quadratum unum, ſive $\frac{1}{15}$ numeri 12.

Tertiò,

Tertiò, sint loca quatuor $\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}$. Aggregatum ordinis superioris est 14 quadrata. Tertia pars ordinis inferioris est 12 quadrata. Majus ergo est aggregatum ordinis superioris, nempe 14, quam tertia pars ordinis inferioris duobus quadratis, sive $\frac{1}{18}$ numeri 36.

Quartò, sint loca quinque $\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}$. Aggregatum ordinis superioris est 30. Triens autem ordinis inferioris est $26\frac{2}{3}$. Superant autem 30 quadrata, quadrata $26\frac{2}{3}$ quantum est $3\frac{1}{3}$ quadrata, sive (multiplicando tum 80, tum $3\frac{1}{3}$ per 3) $\frac{10}{240}$ vel $\frac{1}{24}$, id est vicesima quarta pars octoginta quadratorum.

Postremò (non enim datur procedere in infinitum) sint loca sex $\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}$. Ordo superior est 55. Tertia pars ordinis inferioris est 50; superant autem 55 quadrata, quadrata 50, quinario quadratorum, id est $\frac{1}{30}$ ordinis inferioris.

Infert autem hinc propositionem hanc *Wallisius* [*Cùm autem crescente numero terminorum, excessus ille supra Rationem subtriplam ita continuò minuatur, ut tandem quovis assignabili minor evadat, (ut patet) si in infinitum procedatur prorsus evaniturus est. Adeoque, si* (quæ est propositio 21) *proponatur series infinita quantitatum in duplicata Ratione Arithmeticè proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continuè crescentium, à puncto sive* 0 *inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 3.]

Sed hoc falsum est. Etsi enim $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}$, &c. perpetuò decrescant, manifestum tamen est excessum supra subtriplum procedere ad hunc modum. $\frac{1}{6}$ unius quadrati. $\frac{1}{12}$ duodecem quadratorum. $\frac{1}{18}$ viginti quatuor quadratorum. $\frac{1}{24}$ triginta sex quadratorum, & sic deinceps. Sed $\frac{1}{6}$ unius minor est quam $\frac{1}{12}$ duodecem quadratorum; & hæc minor quam $\frac{1}{18}$ viginti quatuor quadratorum, &c. Ergo excessus ordinis superioris supra partem tertiam inferioris perpetuò crescit pro numero terminorum post 0. Quare si series procedat in infinitum, excessus ejus supra subtriplum ordinis inferioris in infinitum augebitur; tantum abest ut evanescat.

Itaque *Wallisius* primo aberravit à veritate hoc loco. Erroris causa videtur fuisse, Quod magistri Arithmetici discipulos suos docere ut numeris suis supponant res ipsas vel rerum species, non soleant. Ubique igitur partes similes tanquam æquales consideravit; nimirum usu rerum vel judicio destitutus, inter $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ numeri, & $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ quadrati aut cubi non distinxit.

Præterea manifestum est quod quanquam excessus $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}$, &c. procederet in infinitum, infinitum illud debet esse simpliciter sine fine, non *indefinitum* tantùm; aut *quantum est possibile*, (ut excusans se ad Societatem Regalem *Wallisius* dicit) nam alioqui non sequeretur id quod inde infert, nempe excessum illum decrescentem in infinitum, tandem evaniturum esse.

Accedamus

Accedamus ad calculum ſeriei numerorum cubicorum; quæ eſt propoſitio Arithmeticæ infinitorum 39ª his verbis [*Si proponatur ſeries quantitatum in triplicata ratione Arithmeticè proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum) continuè creſcentium, à puncto vel* 0 *inchoatarum, (puta ut* 0, 1, 8, 27, 64, *&c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium.*]

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in Prop. 1, *&* 19.)

Eritque $\begin{cases} \frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}. \\ \frac{0+1+8}{8+8+2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}. \\ \frac{0+1+8+27}{27+27+9+1} = \frac{36}{108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}. \end{cases}$ *Et ſic deinceps.*

Ratio proveniens eſt ubique major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$. *Exceſſus autem perpetuò decreſcit prout numerus terminorum augetur, puta* $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, *&c. aucto nimirum fractionis denominatore, ſive conſequente rationis, in ſingulis locis, numero quaternario, (ut patet) ut ſit rationis provenientis exceſſus ſupra ſubquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum poſt* 0, *Adeoque.*]

In prima ſerie $\frac{0+1}{1+1}$, *Unitas* eſt Unus Cubus, ordo autem inferior eſt 2 Cubi, cujus pars quarta eſt dimidius Cubus. Quare exceſſus ordinis ſuperioris ſupra dimidium Cubum eſt dimidius Cubus.

In ſecunda ſerie ex locis tribus $\frac{0+1+8}{8+8+2}$. Ordo ſuperior eſt 9 Cubi. Quarta pars inferioris ordinis eſt 6 Cubi. Exceſſus eſt 3 Cubi. Sed 3 Cubi ſuperat dimidium Cubum. Exceſſus ergo creſcit.

Sint loca quatuor $\frac{0+1+8+27}{27+27+9+1}$. Aggregatum ſuperioris ordinis 36. Quarta pars ordinis inferioris eſt 27 Cubi. Exceſſus eſt 9 Cubi. Sed 9 Cubi ſunt pluſquam 3 Cubi. Itaque exceſſus ſuperioris ordinis ſupra quartam partem inferioris, pro numero terminorum poſt 0 adhuc creſcit.

Sint loca quinque $\frac{0+1+8+27+64}{64+64+16+4+1}$. Ordo ſuperior eſt 100. Quarta pars ordinis inferioris eſt 80 Cubi. Exceſſus eſt 20 Cubi, qui plures ſunt quam 9 Cubi. Quare exceſſus, pro numero terminorum poſt 0 perpetuò creſcit.

Ab hac propoſitione ſua 39ª infert *Walliſius* 41am, quæ hæc eſt [*Cum autem, creſcente numero terminorum, exceſſus ille ſupra rationem ſubquadruplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet aſſignabili minor evadat, (ut patet,) ſi in infinitum procedatur, prorſus evaniturus eſt. Adeoque ſi proponatur ſeries infinita quantitatum in triplicata Ratione Arithmeticè proportionalium (ſive juxta ſeriem numerorum cubicorum) continuè creſcentium, à puncto ſeu* 0 *inchoatarum; erit ille ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut* 1 *ad* 4.] Falſa autem eſt. Nam exceſſus qui perpetuò creſcit, evaneſcet nunquam.

Quoniam autem tribus his Propoſitionibus doctrina *Walliſii*, de Libra, de

de Centro Gravitatis, etiam universaliter de natura Motus tota innititur, manifestum est, nihil ab illo in libris ejus de motu demonstratum esse, nec ab his Principiis (cum sint falsa) quicquam demonstrari posse; & quoniam permulti homines bonis ingeniis præditi, & Geometriæ studiosi, authoritate illius decepti, erroribus acquiescentes, studia sua damno publico remiserunt, censeo totam doctrinam illam *Wallisii* de Arithmetica Infinitorum ab omnibus Scientiis abigendam esse in perpetuum.

Verum si *Wallisius* negaverit loquutum se esse in his propositionibus, de Quadratis & Cubis, sed abstractè de Quadraticis & Cubicis numeris, & proinde sententiam hanc injustam esse ipse vel alius dixerit; examinemus eas in numeris simplicibus.

Sit series ergo $\frac{0+1}{1+1}$. Ordo superior est 1. Tertia pars inferioris $\frac{2}{3}$. Excessus est $\frac{1}{3}$, non (ut *Wallisius* dicit) $\frac{1}{6}$.

Deinde secunda series est $\frac{0+1+4}{4+4+4}$. Superior ordo est 5. Tertia pars inferioris 4. Excessus est 1 sive $\frac{3}{3}$. Sed $\frac{3}{3}$ est major quam $\frac{2}{3}$ quanta est $\frac{1}{3}$. Crescit ergo excessus.

Sint loca quatuor $\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}$. Aggregatum superioris ordinis est 14. Tertia pars inferioris est 12. Excessus est 2; qui major est quam 1, sive $\frac{3}{3}$. Crescit ergo adhuc.

Sint denique loca quinque $\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}$. Aggregatum superioris ordinis est 30. Tertia pars inferioris est $26\frac{2}{3}$. Sed 30 major est quam $26\frac{2}{3}$ quantum est $3\frac{1}{3}$, quod est plus quam 2. Quare perpetuò crescit.

Itaque Propositio illa etiam in numeris abstractis falsa est. Sed ille non loquutus est de numeris abstractis, ut ex eo intelligi potest, quod Propositiones illas scripsit in ordine ad inventionem Parabolarum ad sua rectangula proportionum; & ex illis Proportionibus ad inventionem centrorum gravitatis figurarum Parabolicarum. Numerus autem in abstracto centrum gravitatis non habet. Verum si sic intelligi se voluit, causa erroris erat, quod putarat Fractionem & Rationem, eandem esse rem. Sed pertinet hoc ad controversiam sequentem.

CONTROVERSIA II.

Dico quod significat vox Ratio *apud Mathematicos.*

RAtionem definit Euclides hoc modo. *Ratio est duarum magnitudinum ejusdem generis secundum quantitatem mutua quædam habitudo*] satis obscurè. Quamobrem in demonstratione nusquam ea usus est. *Hobbesius* eandem definit esse *duarum magnitudinum secundum quantitatem unius ad alteram Relatio*; ipsamque Rationem (quando comparan-

tur magnitudines inæquales) esse quantitatem sui generis: nam quoniam inæqualium unum altero majus vel minus sit, non absurdè dicetur Rationem inæqualium esse quantitatem; & Rationem esse inæqualitatum quantitatem. Neque differt hæc definitio ab illa Euclidis, præterquam quod sit verborum illorum *habitudo quædam* explicatio, distinguitque inter quantitatem absolutam & relativam.

Wallisius contra contendit, eandem esse rem Fractionem & Rationem; nimirum, Fractionem $\frac{1}{2}$ idem esse quod Ratio 1 ad 2; & $\frac{2}{3}$ idem quod ratio 2 ad 3, & similiter quamcunque Fractionem esse Rationem numeratoris ad denominatorem. Sed verumne an falsum sit facilis est examinatio.

Nam siquidem $\frac{1}{3}$ sit Ratio 1 ad 3, & $\frac{2}{3}$ Ratio 2 ad 3 (cum $\frac{1}{3}$ sit dimidia $\frac{2}{3}$) Ratio 1 ad 3 erit subduplicata Rationis 2 ad 3. Cum tamen omnibus Mathematicis notissimum sit Rationem 1 ad 3 subduplicatam esse Rationis 1 ad 9.

A falsa hac Rationis definitione nata est (ut necessarium erat) Rationum apud *Wallisium* Additio & Substractio falsa. Dicit enim Rationem compositam ex Rationibus 1 ad 3 & 1 ad 6 æqualem esse rationi 1 ad 2, quia $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{6}$ faciunt $\frac{1}{2}$; cum ex doctrina Euclidis & omnium Mathematicorum, Ratio composita ex 1 ad 3 & 1 ad 6 est ratio 1 ad 18. Nam Ratio quæ fit a duabus Rationibus (per Def. 5. El. 5.) est Ratio facti ex antecedentibus in se multiplicatis, ad factum ex consequentibus etiam in se multiplicatis. Itaque cum antecedentes 1 in 1 faciant 1, & consequentes 3 in 6 faciant 18, composita Ratio ex 1 ad 3 & 1 ad 6 erit Ratio 1 ad 18.

Quare doctrinam hanc quoque a Scientiis omnibus ablegandam esse censeo. Quia enim Scientia Mathematica dependet tota a cognitione Rationis, impossibile est ut Mathematicus fieri quisquam possit, qui non intelligit naturam Rationis. Ad evertendam Geometriam unus hic *Wallisii* error sufficit, si Professorum publicorum authoritate sustineatur.

CONTROVERSIA III.

De Ratione rectanguli ab Parabolam, ad Parabo[illegible]ides solidum, ad Parabolam Cubicalem, & ad alias Figuras ipsi inscriptas.

Quod triangulum rectanguli eandem habentis altitudinem & basem dimidium sit, omnibus notum est. Quod Parabola rectanguli eandem.

dem altitudinem & baſem habentis ſit $\frac{2}{3}$ demonſtratum eſt ab Archimede, & poſt illum ab aliis.

Sed Figuræ ſunt aliæ multæ habentes eandem baſem & altitudinem cum rectangulo, deſcriptæ verò vel ab altitudine vel a baſe ſecundum certam rationem perpetuò decreſcente; quarum etiam rationes ad rectangulum, & præterea centra gravitatis determinavit *Hobbeſius* in libro *de Corpore* Cap. 17. Atque etiam in tabulas congeſſit.

Walliſius autem dito ante annos octodecem, libello quem Elenchum Geometriæ *Hobbianæ* appellavit, confutaſſe ſe hæc omnia gloriatus eſt.

Idem librum ſatis magnum ab hinc biennio edidit de Motu, in cujus parte prima agit de natura Libræ, in ſecunda de Centro Gravitatis earundem figurarum, non omnium, ſed Parabolæ puræ & Paraboloeidis ſolidi, & Parabolæ Cubicalis. Ad quam rem ſupponit duo Principia; alterum quidem (ut dicit) Cavallerii, nempe hoc, *Quod quantitas omnis continua conſtat ex numero infinito Indiviſibilium*, ſive infinitè exiguorum; quanquam ego Cavallerii libro lecto, nihil ibi in illam ſententiam ſcriptum animadverti; neque Axioma, neque Definitionem, neque Propoſitionem. Nam falſum eſt. Quantitas enim continua, ſua natura diviſibilis eſt in ſemper diviſibilia; nec poteſt eſſe aliquid infinitè exiguum, niſi daretur diviſio in Nihila.

Principium quo utitur alterum, ſuum eſt, fundaturque in Prop. 39. Arithmeticæ ejus Infinitorum, quam Arithmeticam ad controverſiam primam condemnavimus abſurditatis. Eſt autem Principium illud hujuſmodi.

Si intelligatur ſeries quantitatum ab 0 *creſcentium perpetuò juxta ordinem naturalem numerorum*, 0, 1, 2, 3, *&c. Vel juxta ordinem quadratorum, ut* 0, 1, 4, 9, *&c. vel juxta ordinem Cuborum, ut* 0, 1, 8, 27, *&c. quarum ultima ſit data; Ratio totius ſeriei, ad ſeriem totidem maximæ æqualium erit (in caſu primo) ut* 1 *ad* 2; *(in caſu ſecundo) ut* 1 *ad* 3; *(in caſu tertio) ut* 1 *ad* 4, *&c.*

Quoniam autem Prop. 39ª. Arithmeticæ Infinitorum abſurda eſt, rationem dictarum figurarum ad ſua rectangula *Walliſius* non demonſtravit; ſed concluſiones *Hobbeſii* tum de rationibus, tum etiam de earum centris gravitatis, Paralogiſmis ſuis aſſutas pro ſuis venditavit.

Nam Principium hoc (nempe partis ſecundæ libri ſui de Motu Prop. 5.) adeo abſurdum eſt, ut credi vix poſſit ab homine ſano profectum eſſe. *Si intelligatur* (inquit) *ſeries infinita quantorum, cujus ultimum eſt datum*, id eſt ſi infinitum intelligatur eſſe finitum, nam cujus datum eſt primum (nempe 1) atque etiam ultimum, nonne totum eſt finitum? Profectò amici ejus nunquam hæc legerunt. Mirandum enim eſſet ſi abſurditatem tantam non vidiſſent.

Per

Per infinitum intelligere se dixit tantummodo *quantum est possibile*. Sed quando dixit? Postquam a Societate Regali monitus esset ut propositionem suam, quæ absurda videbatur, si posset, defenderet; tunc dixit, & contrà quam ipse sentiret. Nam ad Prop. 19^m & 39^m. loquutus est de serie, sive progressione per numeros infinita. Quæ si infinita non erat, non processisset demonstratio. Illud ipsum *Quantum est possibile* dicat tandem finitumne est, an infinitum? Si finitum, Fractiones istæ $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}$, &c. & $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}$, &c. perpetuò decrescentes nunquam extinguentur, neque ergo tota series ad totidem maximæ æquales habebit rationem 1 ad 3 vel 1 ad 4, &c. Itaque Principium illud falsum erit. Sin infinitum, insanum erit. Sed quid si dixerit intelligere se per seriem infinitam, quantitates factas per finitæ quantitatis bisectionem æternam? Æquè absurdum dixerit. Bisectio enim æterna quid aliud est quam semper secare, nunquam finem facere? Incidet itaque in absurdum idem. Quare dictarum figurarum ad rectangula sua rationes *Wallisius* non demonstravit. Earundem autem Centra Gravitatis ex rationibus figurarum ad sua rectangula, ne conatus quidem est ostendere; sed sumpta ex *Hobbesii* tabellis somnio suo subscripsit, ut a se inventa crederentur.

Hobbesius cap. 17. Art. 2. ut figurarum dictarum ad sua rectangula rationes explicaret, supponit latera rectanguli angulo recto adjacentia moveri ad latera sibi opposita parallelõs, tempore & velocitate habentibus inter se rationem quamlibet numeris effabilem. Quo supposito deducitur ad Propositionem universalem, nempe hanc. *Si rectanguli latus utrumvis, versus latus sibi oppositum moveatur parallelõs, perpetuò decrescens donec in punctum evanescat; idque secundum rationum rationem aliquam numeris explicabilem, ut æqualem, duplicatam, triplicatam, &c. Figura eo motu descripta erit ad Complementum, id est ad residuum rectanguli in eadem ratione quam habent inter se ipsæ rationes, nempe eadem vel duplicata vel triplicata, &c.*

Demonstratio extat cum multis figuris, quæ non necesse est ut hoc loco repetantur. Legant qui dubitant. Ipse illam legens legitimam judicavi; imò non indignam quæ haberetur pro Axiomate.

Nonne hoc sciunt qui mercandi causa pecunias congerunt, etsi ne nomen quidem Euclidis audierant, negotiatores? Nonne sciunt lumine naturali, ex ratione contributæ pecuniæ, quantam partem lucri sive pecuniæ multiplicatæ postulare debent? Ponatur enim pro pecunia contributa a duobus negotiatoribus Rectangulum A. Si ergo æqualia contribuerant, uterque multiplicatæ pecuniæ dimidium petiisset, id est e rectangulo A triangulum altitudinis & basis ejusdem cum ipso.

Rursus si alter contribuisset ut 2, alter ut 1, divisa pecunia multiplicata

cata trifariam, is qui contribuerat 2, partes ſibi $\frac{2}{3}$ petiiſſet, alter reſidua contentus eſſet. Similiter diviſo rectangulo A trifariam, Parabola quia generatur per rationes duplicatas poſſidebit rectanguli duas tertias, & Complementum unam ſive $\frac{1}{3}$.

Similiter ſi alter contribuiſſet 3, alter 1, qui contribuerat 3 petiiſſet pecuniæ multiplicatæ $\frac{3}{4}$, alter $\frac{1}{4}$; ſic Parabola Cubicalis quia fit per rationes ubique triplicatas, habebit $\frac{3}{4}$ rectanguli A, & complementum habebit $\frac{1}{4}$.

Et univerſaliter, ut negotiatores dividunt pecuniam ſuam auctam, ſine Geometria; ita Mathematici dividunt rectangulum in partes proportionales rationibus, per quas figuræ trilineæ rectangulo inſcriptæ generatæ erant.

Eodem modo conorum & conoideum genitorum a decreſcente Cylindri baſe, juxta rationum rationes numero effabiles, rationes ad Cylindrum in quo inſcriptæ ſunt, ab *Hobbeſio* capite eodem 17° *Libri de Corpore*, una cum eorum centris Gravitatum inventæ ſunt, & in tabulam conjectæ.

Totius ergo doctrinæ de dictarum figurarum illarum rationibus, & de Centro Gravitatis earum inventionem adjudico *Hobbeſio*, non tamen ut rem magnam; quia idem faciunt qui Geometriam nunquam didicerunt, quanquam rei cauſas neſciunt, niſi in pecunia explicare. *Walliſius* autem non tantùm fraudis, ſed etiam ἀμαθίας, condemnandus eſt.

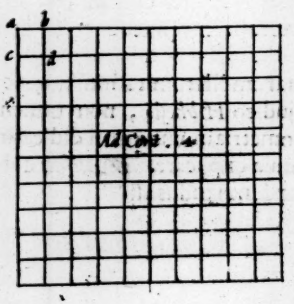
E CON-

CONTROVERSIA IV.

Utrum Numeri Quadrati Radix, eadem res ſit cum Figuræ Quadratæ Latere.

SI qui pro maximis habentur hodiè Arithmeticis, Principia illa Manifeſta quæ Præfationi neceſſariò ſubjuncta ſunt, intellexiſſent, doctrina hæc *Walliſii* de Radicum Numeralium, & Laterum Quadratorum identitate nunquam, puto, publicata eſſet.

Deſcripto enim Quadrato, & diviſo uno quolibet latere in 10 partes æquales, quarum *a b*, vel *a c* ſit una; & quadratum ejus *a d* centeſima pars quadrati totius. *Walliſius* affirmat, ſi multiplicentur 10 illæ lineæ *a b* in ſe; Factum ſive Productum fore 100 quadrata, quorum *a d* eſt *Unum*. *Hobbeſius* contrà dicit productum fore tantummodo centies *a b*. *Walliſius* enim multiplicandum putat non modo 10 in 10, ſed etiam lineam *a b* in lineam *a c*; neque tamen quare ita faciendum ſit cauſam ullam aſſignat. *Hobbeſius* verò dicit, primò, lineam per lineam multiplicari non poſſe, nec per aliam rem quamcunque præter Numeratam. Secundò, ne *Unum* quidem per *Unum* multiplicari poſſe; propterea quod quicquid multiplicatur fit plura, ſed *Unum* per *Unum* non facit plura *Una*.



Præterea, Radix Numeri quadrati eſt quadrati ſui pars; latus autem per *Walliſium* non eſt figuræ quadratæ, vel ſuperficiei cujuſcunque pars nec ſi eſſet, rectangulum eſſet, ſed Trapezium.

Tertiò, Numeri multiplicati numeratæ rei ſpeciem non mutant, ut Oughtredus rectè dicit (cum aliis Algebræ authoribus omnibus) *Walliſii* Magiſter. Sunt autem lineæ & quadrata diverſæ ſpeciei quantitates.

Quartò, cum totius quadrati Latus ſit decem, in quo linea *a b* eſt *Unitas*, & ſint decem idem quod decem *Unitates*, multiplicati decem per decem, totidem facient quot decem Unitates in decem Unitates. Sed decem lineæ multiplicatæ in ſe faciunt 100 lineas. Quare non faciunt 100 quadrata.

Quintò,

Quintò, ſi quæratur quoties ſunt 10 A in 100 A, Quotientem eſſe 10 A manifeſtum eſt. Quia ergo Quotiens 10 A multiplicans Diviſorem 10 A, reſtituit Diviſum 100 A, manifeſtum etiam eſt factum ex 10 A in 10 A eſſe 100 A, non 100 AA, nec 100 quadrata.

Poſtremò, in adſcripti quadrati latere quolibet, numerari poſſunt 10 *a b*, & in 10 lateribus 100 *a b*, quæ ſunt id quod fit ex 10 *a b* in 10 *a b*.

Quod ergo Radix & Latus idem ſint, eſt contra ſenſum naturalem.

Juſſus, ad hæc reſpondit *Walliſius* ſcripto ad Societatem Regalem, ſenſum ſuum ſic explicans. Sicut 10 dodenarii multiplicati in ſe faciunt 100 dodenarios dodenariorum, ſic 10 lineæ in ſe multiplicatæ faciunt 100 quadrata ipſarum linearum. Quis niſi puer ſic reſpondiſſet? Dicendo enim 10 dodenarios, dodenarium pro *Unitate* ponit. Poſtea dicendo 100 dodenarios dodenariorum, Unitatem facit duodecimam tantùm partem dodenarii. Præterea quam ſimilitudinem habent inter ſe *dodenarius dodenariorum*, *& quadratum linearum*, vel ſi (imitando dodenarium dodenariorum) dixiſſet lineam linearum, quid ſignificaſſet? Cur non ſimiliter, ſi quæſitum eſſet productum ex multiplicatione 10 militum in 10 milites, reſpondere potuit 100 milites quadrates?

Cenſeo igitur doctrinam hanc *Walliſii* de Radicibus, atque adeo Algebram univerſam continere ſe debere intra fines Arithmeticæ, neque omnino audiendam eſſe in cauſa Geometrica; neque ſymbola in publicum prodire ulla, præter orationem, & ea quæ ab omnibus intelliguntur. Nam characteres illi occulti quibus crebro utitur *Walliſius*, Myſterium eſſe videntur, ignorantiam hominis neſcientibus, & procedere ab ambitione cupientis videri apud vulgus, artis magicæ non imperitus.

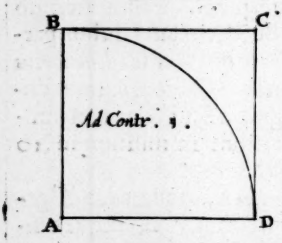
CONTROVERSIA V.

De Puncto, de Longitudine ſine Latitudine; & an Angulus ſemicirculi ſit rectus.

Punctum *Walliſius* ſine quantitate eſſe, nec tantum indiviſum, ſed planè indiviſibile & Nihil eſſe dicit; Et propterea eſſe lineam quoque longitudinem ſine latitudine. Unde (ut mihi quidem videtur) æquè ac punctum nihil eſſe ſequitur.

Hobbeſius punctum ſignum eſſe dicit indicans initium, finem, vel medium longitudinis, & proinde viſibile, & (per conſequens) divilibile & Quantum. Ex quo manifeſtum eſt etiam lineam habere latitudinem diviſibilem, & Signum quoque eſſe initii, finis & medii in Superficie. Sed neque

neque quantitatem puncti, neque latitudinem lineæ considerari debere in demonstratione ubi comparantur ejusdem generis quantitates. Ego vero *Hobbesio* consentio. Alioqui enim necessarium mihi esset, quæcunque & quantumcunque difficilia demonstranda habeo, sine diagrammate demonstrare. Nam lineas sine latitudine nec ducere nec imaginari possibile est. Secundò, Euclides Def. 5. El. 5. rationem inter se habere negat quantitates illas quarum altera alteram quantumvis multiplicata superare non potest, sed esse diversi generis quantitates. Tales autem sunt longitudo & superficies. Unde sequitur, argumentum omne a linea ad superficiem esse invalidum. Scio in minutissimo Parallelogrammo longitudinem intelligi posse, sed in quo loco scire non possum. Ex hac difficultate nascitur alia; nempe an angulus A B D factus a semidiametro A B & arcu B D sit rectus, id est æqualis angulo A B C. *Wallisius* minorem esse dicit, quantum est angulus factus a recta B C & arcu B D, quem appellant angulum Contactus. *Hobbesius* æqualem esse dicit.



Dissentionis causa est definitionis, Anguli plani apud Euclidem non pariter intellecta. Definitio hæc est, *Angulus planus est duarum linearum in plano, nec in directum jacentium unius ad alteram inclinatio.* Ex qua definitione sequi *Wallisius* putat rectam B C cum arcu B D facere angulum, & quidem ejusdem generis cum angulo A B C; Quod *Hobbesius* negat; Angulumque planum, & satis ad mentem Euclidis, clarius definit hoc modo. *Angulus planus est qui fit ex descriptione circuli, & quantitatem habet eandem quam habet ratio arcus a rectis e centro intercepti ad totam perimetrum.*

Non est ergo angulus Contactus quantitas ejusdem generis cum quantitate anguli facti per circulationem. Quod etiam confirmat Euclides qui ejusdem generis quantitates esse negat quæ multiplicatæ non possunt se mutuò superare. Præterea si daretur majorem esse angulum rectum angulo semicirculi, sequeretur (ut notavit olim Briso) fieri posse ut duarum quantitatum minor, continuo progressu augeri posset, donec majorem superaret, nec tamen ut transeat per æqualem. Quod est monstri simile. Censeo ergo erravisse *Wallisium*. Hactenus vidimus *Hobbesium* Geometriam universam evertisse *Wallisii*. Videamus jam an evertere possit *Hobbesii Rosetum Wallisius*.

CON-

CONTROVERSIA VI.

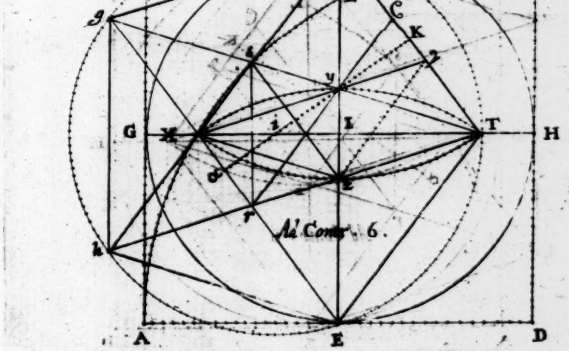
De Sectione Lineæ rectæ extrema & Media ratione. Roſeti Prop. 1, 2.

REpetatur Roſeti Figura 12. In qua ABCD eſt quadratum diviſum a rectis EF, GH in quatuor quadrata æqualia concurrentia in I. Radio DA deſcriptus arcus AX eſt arcus 30 graduum. Junctam EX æqualem eſſe dicit *Hobbeſius* majori ſegmento rectæ EF diviſæ extrema & media ratione. Negat *Walliſius*. Examinetur.

Arcus AX eſt arcus 30 graduum. Rectæ EX æqualis eſt FX. Rectæ XI fiat æqualis IT, ducanturque ET, FT. Eſt ergo EXFT Rhombus. Et latera ejus oppoſita parallela.

Radio EX deſcribatur arcus Xy ſecans EF in *y*. Item radio FX vel FT deſcribatur arcus zX. Ductis ergo Xy, Xz, yT, zT, erit Xy Tz Rhombus, & latera ejus oppoſita parallela; & rectæ EX, Ey, FX, Fz ſunt æquales. Etiam anguli ad X & z trianguli FXz æquales erunt, & angulis ad X & *y* trianguli EXy uterque utrique æqualis. Sunt autem & rectæ Fy, Ez æquales.

In rectis EX, FX ſumantur Er Fs tum inter ſe tum utraque utrique æquales rectis Ez, Fy, junganturque *rs*, *sz*, *ry*, *rz*, *sy*.



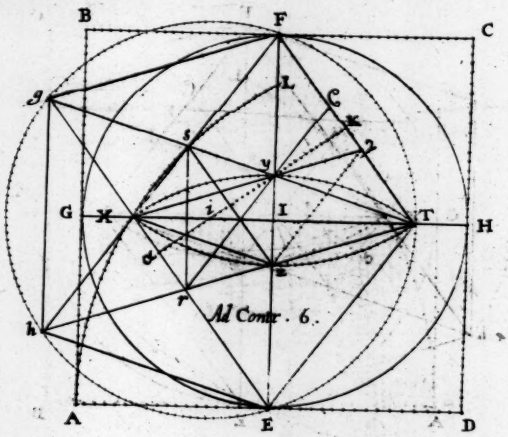
F Erunt

Erunt ergo latera pentagoni tria Xs, yz, rX inter ſe æqualia; item duo latera ys, rz inter ſe æqualia, & triangula tria Xzs, Xyr, yXz æqualia & ſimilia, & æquicrura.

Producantur ry, Xy ad FT latus Rhombi oppoſitum lateri EX in ϵ & γ; eruntque $F\epsilon$ & Xr parallelæ & æquales, propter æquales & parallelas EX, FT. Propter eandem cauſam erunt rectæ Xr & $T\gamma$ æquales & propter triangula æquicrura Xyr, $\epsilon y\gamma$, ſi dividatur angulus ad y, a recta yK bifariam, erunt anguli ad K recti; & proinde producta Ky ad Xr in α, anguli ad α erunt recti. Itaque recta αK dividit latus FT bifariam & ad angulos rectos, in K.

Sunt ergo triangula FyK, TyK æqualia & ſimilia; & rectæ Fy, yT, Fs, Xy, yr, Xz, zT, rs æquales. (Nam rs, cum ſit parallela EF, facit angulum rsy æqualem angulo alterno syF, id eſt hujus verticali Tyz; & proinde Tys eſt linea recta & æqualis Tr; & rs æqualis ry.) Item anguli FTy, TFy, FXy, Xrs, Xsr, yrT, yTr ſunt æquales; & quia anguli ad y & z trianguli Xyz iidem ſunt cum angulis ad y & z trianguli EXy vel FXz erit angulus zXy æqualis angulo ad E trianguli XEy, id eſt angulo sXy, vel zXE, vel zTE. Itaque tres anguli ad X trianguli Xrs ſunt inter ſe æquales.

Ut ergo EF ad FX, id eſt ad Fz, ita eſt Fz ad zs (propter zs, EX parallelas) vel sF vel yF. Item ut EF ad FX ſive Ey, ita eſt Ey ad zs ſive Ez. Sunt ergo EF, Ey, yF, ut & FE, Fz, zE continuè proportionales, & majus ſegmentum eſt Ey, vel Fz quatum utraque æqualis eſt rectæ EX. Quod erat demonſtrandum.



Sequitur

Sequitur ex præcedentibus (centro pentagoni invento *i*,)

Primò, rectam T*i*, esse semidiametrum circuli transeuntis per puncta Pentagoni E, T, & F; atque etiam (productis T*s*, EX ad concursum in *g*, & rectis FX, T*r* ad concursum in *b*) per *g* & *b*.

Secundò, Quod majus segmentum lateris quadrati subtendit quintam partem circuli transeuntis per Pentagoni stellam, id est per terminos decem, laterum quinque ejusdem quadrati lateris EF.

Tertiò, Radium T*i* compositum esse ex TI, & dimidio minoris segmenti, id est dimidiæ semidiametri circuli ambientis Pentagonum X*syzr*. Est enim TK dimidia majoris segmenti, divisi lateris EF extrema & media ratione, & *yi* dimidia minoris segmenti, & angulus K*i*T quinta pars recti.

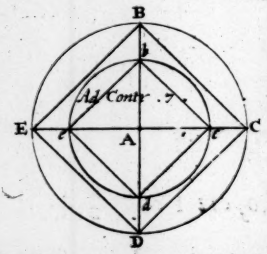
CONTROVERSIA VII.

De Polygonis regularibus. Roseti Prop. 3,4.

PRopositio hæc tertia multiplex & longiuscula plures habet figuras; sed quas non est necessarium hoc loco renovare. Objicit *Wallisius* contra Prop. tertiam, quod dixerit *Hobbesius* chordas (in eodem circulo) suis arcubus esse proportionales. Attamen in demonstratione illa, quæ diligenter & sæpe a me examinata est, id quod objicit invenire nusquam potui. Inveni quidem duas rectas quæ sunt inter se ut 8 ad 7, si applicentur in eodem circulo vel curva eadem quacunque, non mutare proportionem, sed fore ubique & semper ut 8 ad 7. Invenio etiam duas rectas æquales in ejusdem circuli circumferentia applicatas esse inter se ut arcus quos subtendunt. Item si sint rectæ æquales applicatæ in circumferentia ejusdem circuli quotcunque, sciunt omnes illas in eadem esse ratione cum suis arcubus. De comparatione chordarum inæqualium in eodem circulo nusquam loquitur. Procedit tandem ad suppositionem quod si arcus divideretur in tot partes æquales in quot dividi intelligibile est, chordas illorum arcuum simul sumptas, æquales esse ipsis arcubus omnibus simul sumptis. Ex eo autem probat, Quod si æquales non sint, esse eos adhuc perpetuò bisecabiles. Itaque sententiam hac in re disjungo; aut non assuetum *Wallisium* lectioni demonstrationum Geometricarum (propter studium Algebræ) demonstrationem *Hobbesii* intelligere non potuisse; aut tuendæ dignitatis causa dixisse id quod sciebat esse falsum. Sententiam accipiat utram malit. De propositione ipsa sic censeo. Vera est, nova, bene demonstrata, illis qui ductum orationis animo attento sequi valent evidentissima, methodo artificiosa, generali, & quanquam Heptagono,

tagono, Pentagono & Trigono tantùm applicata, omnibus Polygonis applicabili.

Prop. Roſeti 4. Geometrica quæſtio non eſt, ſed ſenſus communis ſive rationis naturalis per quam fiunt definitiones. Nam qui quærit duarum linearum (vel ſuperficierum) utra ſit magis curva, curvi quærit naturam, quam *Hobbeſius* conſiſtere dicit in diſceſſu a rectitudine, per flexiones; id eſt minorem eſſe curvedinem circuli majoris quam minoris; nimirum quia majorem minus afficit flexio eadem quam minorem.



Deſcribantur enim duo Circuli centro A concentrici BCDE, *bcde*, qui rectis BD, EC per centrum, dividantur quadrifariam. Ductis ergo chordis BC, CD, DE, EB, *bc*, *cd*, *de*, *eb*, manifeſtum eſt minores eſſe chordas minoris circuli quam majoris, in quotcunque partes æquales uterque circulus ſit diviſus. Plus ergo reſtat lineæ non flexæ (id eſt rectæ) in majore quam in minore. Accedit ergo propriùs ad naturam rectæ, perimeter major quam minor. *Walliſius* nihil aliud objicit quam quod totidem flexiones faciunt circuli perimetrum majoris & minoris, id eſt, ex recta brevi & longa iiſdem flexionibus fit perimeter quæcunque; quod eſt contra lumen naturale.

Præterea quis dubitat, quin pars exigua ſuperficici ſphæræ maximæ planior ſit quam tantundem ſuperficiei in ſphæra minima; & propterea omnes ſimul partes omnibus ſimul partibus eſſe majores. Sentio ergo cum *Hobbeſio*.

CONTROVERSIA VIII.

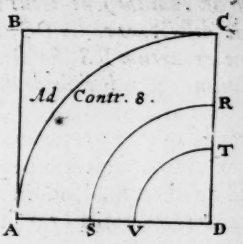
De Æquatione lineæ rectæ & Arcus Circuli. Roſet. Prop. 5.

REpetenda eſt hoc loco ipſius *Hobbeſii* demonſtratio, & Figura. Eſt enim Problema nobiliſſimum a ſummis & imis Geometris diu quæſitum fruſtra, & fere deſperatum; quod *Hobbeſius* demonſtraſſe ſe putat hoc modo.

Media proportionalis inter ſemidiametrum Circuli & ejuſdem duas quintas æqualis eſt duabus quintis quartæ partis Circuli.

Deſcribatur

Deſcribatur quadrans Circuli DAC, & compleatur quadratum ABCD. In latere DC ſignetur DT duæ ipſius quintæ; & inter DC & DT ſumatur media proportionalis DR, ut ſint DC, DR, DT continuè proportionales; & deſcribantur arcus RS, TV quadrantales. Eſt ergo arcus TV duæ quintæ arcus C. A.



Dicit arcum TV & rectam DR eſſe æquales. Supponatur datam eſſe rectam æqualem arcui AC, & ab ea deſcriptum arcum quadrantalem. Erunt ergo DC, CA, arcus ſuper CA continuè proportionales

Scribantur ſeorſim	DC. CA. Arcus ſuper C A ∴
Et ſub his	DR. RS. Arcus ſuper R S ∴
Rurſus ſub his	DT. TV. Arcus ſuper T V ∴

Erunt autem in ſingulis ordinibus Antecedentes ad Conſequentes ut ſemidiameter ad arcum quadrantis prorſum; & ut arcus quadrantis ad ſemidiametrum retrorſum.

Ut ergo D C ad RS, ita eſt RS ad arcum ſuper TV. Itaque DC, RS, arcus ſuper TV erunt continuè proportionales. Et quoniam DC, CA, Arcus ſuper CA ſunt etiam continuè proportionales, habentque Antecedentem primam DC communem; ratio Arcus ſuper CA ad Arcum ſuper TV, erit, (per Eucl. 14. 28.) duplicata rationis CA ad RS; & propterea Arcus ſuper RS eſt medius proportionalis inter Arcum ſuper CA & Arcum ſuper TV. Jam ſi DC major ſit quam RS, etiam RS major erit quam Arcus ſuper TV; & Arcus CA major quam Arcus ſuper RS. Quare, cum DC, CA, arcus ſuper CA ſint continuè proportionales, Arcus ſuper TV, Arcus ſuper RS, Arcus ſuper CA non poſſunt eſſe continuè proportionales. Quod eſt contra demonſtrata. Non eſt ergo DC major quam RS.

Supponatur rurſus RS major quam DC; erit ergo Arcus ſuper RS medius proportionalis inter Arcum ſuper TV, & majorem quam eſt Arcus ſuper CA. Redibit ergo inconveniens. Quare ſemidiameter DC æqualis eſt Arcui RS; & per conſequens Arcus TV, id eſt duæ quintæ Arcus CA & recta DR ſunt æquales. Id eſt, media proportionalis inter ſemidiametrum & duas ejus quintas æqualis eſt duabus quintis quartæ partis Circuli circumferentiæ. Quod erat demonſtrandum.

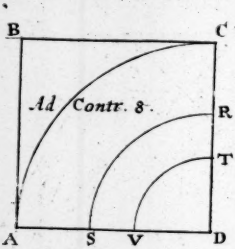
Contra hæc *Walliſius* objicit in hæc verba *Propoſitio quinta (quæ exhibet rationem Radii ad Perimetrum circuli, ut R ad* 10 R $\sqrt{\frac{2}{5}}$; *hoc eſt, ut* 10000 *ad pluſquam* 63245, *quam alii faciunt ut* 10000 *ad minus quam* 62832;) *dependet ex hac conſequentiâ (p.* 18. *l.* 5.) *Quoniam ut DC ad DR (radi-*

us

us ad radium) ſic arcus CA ad arcum RS (ſimilem;) ita quadrantalis arcus deſcriptus radio DC, id eſt arcus CA, ad arcum deſcriptum (radio DR, hoc eſt, arcum RS, ſic dicendum erat; ſed ille) radio RS extenſo in rectitudinem. Quod abſurdè dictum eſſe, per ſe liquet.

Sed argumentum illud a Radicibus numeralibus, quoniam in controverſia quarta damnatum & prohibitum eſt, nihil valet; verba autem [extenſo in rectitudinem] redundantia, non ſunt in Exemplari correcto ad quod reſpondendum erat.

Demonſtratio breviſſima & lucidiſſima, diagramma ſimplex eſt. Mirandum igitur eſt hominem diu in controverſia hac verſatum adeo potuiſſe cæcutire ut non videret neceſſe eſſe, ſi TV ſit duæ quintæ arcus CA, etiam arcum deſcriptum a duabus illis quintis, eſſe duas quintas arcus deſcripti a CA; aut ſi RS eſt media proportionalis inter CA & TV, non etiam eandem duas quintas eſſe arcus deſcripti ab arcu CA; aut cum legeret eſſe ut RS ad CA, ita arcum RS ad arcum deſcriptum a CA, & rurſus ut arcus a TV ad arcum ab RS, ita eſſe arcum ab RS ad arcum a CA, dubitare potuiſſe, quin arcus a TV æquālis eſſet RS, niſi animum obſtructum habuiſſet cogitationibus Algebricis.



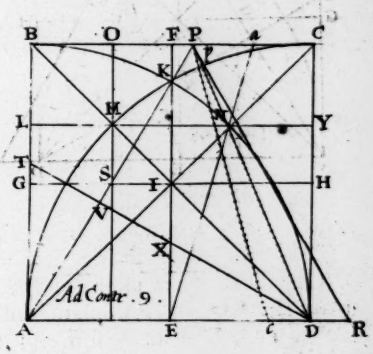
Contra ſextam, ſeptimam, octavam, & earum Conſectaria & Corollaria, nihil objicit præterquam quod dependeant a quinta.

Etiam contra nonam hoc ſolum objicit quod dependeat a tertia. Quoniam ergo illæ omnes bene demonſtratæ ſunt, nihil habent quod hic agant *Walliſii* objectiones.

CON-

CONTROVERSIA IX.

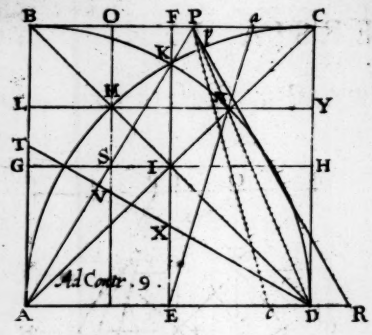
De Tangente arcus graduum 22 ½ *ad Roſeti Prop.* 10, 11, 12, 13, 14.



REpetenda eſt Figura. BP eſt Tangens 30. grad. NDC eſt angulus graduum 22 ½. *Hobbeſius* dicit DN rectam, ſi producatur, tranſituram eſſe per P; & per conſequens, Tangentes duas 30 graduum & 22 ½ graduum compoſitas, æquales eſſe lateri BC; & angulum quem faciunt AP & PD eſſe $\frac{7}{15}$ anguli recti. Hæc omnia negat *Walliſius*, qui duas rectas AP, DN concurſuras eſſe dicit ſupra latus BC, nempe extra quadratum. Examinetur. Angulum NDC eſſe quartam partem anguli recti, extra Controverſiam eſt. In producta AD, ſumatur AR æqualis AP, jungaturque PR. Cum ergo angulus PAD ſit $\frac{2}{3}$ anguli recti, id eſt, æqualis angulo trianguli æquilateri, & duo latera AP, AR ſint æqualia, erit triangulum APR æquilaterum; & angulus ARD erit $\frac{8}{15}$ anguli recti. Et quia angulus NDC eſt quarta pars recti, erit ille $\frac{1}{15}$ recti; & propterea angulus ADN erit $\frac{9}{15}$ recti. Ergo duo anguli ARP, PAR ſunt $\frac{16}{15}$ duorum rectorum.

Producatur DN ad BC in *p*; &, quia angulus CD*p* eſt quarta pars recti, erit angulus AD*p* $\frac{3}{4}$ unius recti, cui æqualis eſt alternus D*p*C. Sunt ergo duo anguli PAD, AD*p* $\frac{17}{15}$ duorum rectorum. Ductâ ergo A*p*, erunt omnes anguli trianguli A*p*D $\frac{34}{15}$ duorum rectorum. Quare angulus A*p*D eſt $\frac{7}{15}$ duorum rectorum, quorum angulus *p*DC eſt 9 unius recti, & DRP $\frac{8}{15}$ unius recti; & duæ rectæ D*p* & RP, item D*p* & AP concurrentes alicubi facient cum ambabus angulum $\frac{1}{15}$ unius recti. Id quod fieri non poteſt, niſi concurrant in puncto P ubi concurrunt ipſæ AP, RP. Producta ergo DN incidet in P, eruntque P & *p* idem punctum; & proinde angulus APD eſt $\frac{7}{15}$ duorum rectorum, id eſt $\frac{7}{15}$ unius recti. Quod erat demonſtrandum.

Coroll. Manifeſtum ergo eſt, primò, quod BP Tangens 30 graduum aſſumpta



assumpta Tangente graduum $22\frac{1}{2}$, æquatur lateri BC. Secundò, Quod CY (id est) NY (id est) GS nempe differentia inter latus AB & AL, sive semidiagonalem AI, æqualis sit dimidiæ Tangenti BP, & HY æqualis P*a* dimidiæ PC Tangentis $22\frac{1}{2}$.

Contra hæc objicit rursus *Wallisius* partim a radicibus numeralibus suis; partim ex Tabulis Tangentium, quas Tabulas sciunt Mathematici confectas esse per radicum extractiones. Sunt ergo (ut ad controversiam quartam) ostensum est falsæ, & a demonstrationibus propositionum Geometricarum, excludendæ.

Objicit præterea assumere *Hobbesium* sine probatione rectam BP duplam esse CO, id est duplam differentiam inter latus DC & semidiagonalem DO. Sed hoc falsum est; nam & bene illud ante demonstraverat, & ego rursus idem in controversia præsente demonstravi.

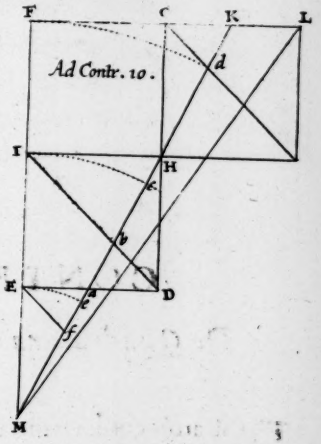
Contra decimam quartam objicit iterum ineptias suas Radicum, & negat Tangentem graduum 30 duplam esse CO; quorum prius prohibitum est ad controversiam 4^am^. Posterioris contrarium in præsente controversia demonstravimus. Hactenus Roseti bene se habent omnia.

CONTROVERSIA X.

De Prudentia ad studium Geometriæ necessaria. Rosetum 15, 16.

HObbesius ex Euclidis El. 5. Def. 5. *Rationem* (inquit) *habere inter se dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuò superare.* Inde infert ex eodem Euclide, *inter lineam & superficiem rationem esse nullam*; quod verissimum est, si linea sit longitudo sine latitudine. Multiplicata enim longitudo ne minimam quidem superficiem unquam superabit. Ex quo sequitur, a linea ad superficiem, & contrà, argumentum omne esse invalidum. Neque id puto negaturum esse *Wallisium*. Deinde ne videretur anteponere mensurationes Mechanicorum demonstrationibus Mathematicorum subjungit, *Neque hæc dico, quod mechanicas operationes pro legitimis*

timis demonſtrationibus admiſſas velim; ſed in omni quæſtione Geometricæ multo prudentius eſſe exiſtimo, antè mechanicè menſurando, magnitudinem quæſitam, quantum fieri poteſt, veritati proximam aſſequi, & deinde cauſam inquirere propinquitatis, quæ inventa veritatem aut falſitatem deteget, quam temerè credens incertæ Logicæ vel Logiſticæ ſuæ vel authoritati aliorum, ea quæ neſciat pronuntiare, &c. Et rurſus, *multo probabilius pronuntiabit a menſura menſor diligens, quam qui pronuntiat a falſis Principiis, &c.* Hæc *Hobbeſius*, & (ut mihi videtur) non imprudenter; quo conſilio ſi uſus eſſet *Walliſius*, quod Figuræ finitæ centrum gravitatis diſtat ab ipſa figura ſpatio infinito, nunquam ſcripſiſſet. Sed quid ad hæc *Walliſius*? *Hobbium* (ait) *his methodis utentem, talem nobis producere Geometriam; utpote cui circinus eſt calculo accuratior.* In *Hobbeſii* verbis nihil video ego in illam ſententiam. Quid ergo eſt? Mendum an Mendacium?

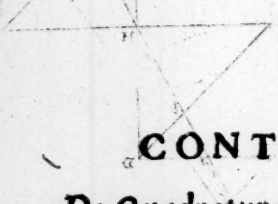


Veniamus ergo ad Propoſitionem 16am, quæ neque Theorema neque quicquam affirmati eſt; ſed quæſtio propoſita Mathematicis ut ſolverent quibuſcunque, quam ille non ſolvit. Quid ergo dicit? *Confutatio* (inquit) *facilis eſt.* Sed eandem etiam *Hobbeſius* falſam eſſe putat, utpote veræ quam ad Roſ. Prop. 1. demonſtravit contrariam. Debuit autem peccatum aliquod aſſignaſſe *Walliſius*. *Eſt* (inquit) K*d* ad AD ut $\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}$ ad 1. Sed argumentum hoc a radicibus condemnatum eſt. *Hobbeſius* autem in eo peccatum eſſe putat, Quod punctum M ſupponunt eſſe ſine latitudine, & punctum *d* habent pro viſibili. Quo ſuppoſito, M*d* neque linea neque rectangulum erit, ſed triangulum, & inde oriri difficultatem quæſtionis; putat, inquam, non affirmat; ideoque manet hactenus difficultas inſoluta.

CONTROVERSIA XI.

De latere Icoſaedri. Roſet. Prop. 17.

COntra hanc *Walliſii* objectio prima eſt, Quod dependeat a decima quarta, & a Conſectario 3. Prop. 7. Quæ nihil valet, cum & propoſitio illa, & Conſectarium illud in præcedentibus ſint confirmata. Secunda ſumpta eſt a Radicibus, & propter eam cauſam tollitur per controverſiam quartam. Tertia eſt, Quod faciam Be tertiam partem arcus quadrantalis BD, cum ſit tertia pars rectæ B*b*. Tollitur ergo ex eo quod ad controverſiam 8 oſtenſum eſt rectam B*b*, & arcum BD eſſe æquales. Hactenus ergo Roſeti omnia ab *Hobbeſio* rectè demonſtrata eſſe judico.



CONTROVERSIA XII.

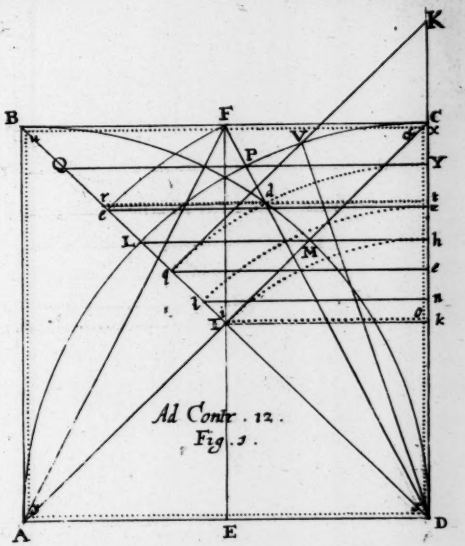
De Quadratura Circuli. Roſet. Prop. 18, 19.

POſt arcûs quadrantalis ad Radium Circuli rationem exhibitam, & a ſimpliciſſimo diagrammate ita breviter & perſpicuè demonſtratam, ut nulla Euclidis Propoſitio clariùs & breviùs (ut legenti controverſiam octavam apparebit) demonſtrata fuerit, quis crederet eſſe aliquem qui dubitaret quin inventa etiam eſſet quadrantis & quadrati æqualitas? *Walliſius* tamen negat. Nam ſemel recepta in Geometriam Principia aliena veritatem quantumvis evidentem turbant & opaca omnia faciunt.

Itaque ut appareat propoſitionis veritas, purganda mihi eſt a fæce errorum inveteratorum. Quod ut faciam renovanda eſt Figura.

Rectam

Rectam Dz sive zc æqualem esse arcui CL, id est dimidio arcus CA, demonstratum satis est ad controversiam 8. Est autem Dz, per constructionem æqualis rectæ DF. Per punctum P in concursu rectæ DF & arcus CA *Hobbesius* ducit rectam YQ parallelam lateri BC, & terminatam in diagonali DB; & inde infert triangulum DYQ æquale esse Sectori DCL, nempe octanti totius Circuli.

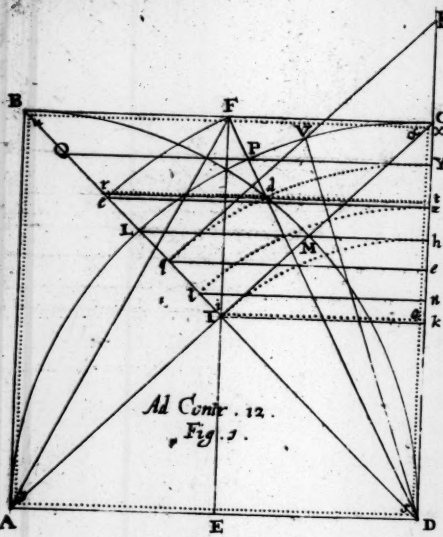


Quod ut demonstret facit arcum LV æqualem arcui CP. Atque hoc modo Sectori DCL additus est (per superpositionem) Sector DPV. Itaque duo Sectores DCP, DLV majores sunt Sectore DCL tanto quantus est Sector DPV. Deinde probat trilinea duo CYP, PQL simul sumpta æqualia esse Sectori DPV; quod concedit etiam *Wallisius*. Si auferatur ergo a Sectoribus DLV, DCP Sector ille DPV semel, restabunt duo Sectores æquales DLP, DCV. Quorum PQL additum Sectori DPL facit triangulum DFQ æquale triangulo DYP; idem ergo additum Sectori DCV faciet quoque triangulum æquale triangulo DYP. Sed quomodo addi potest PQL Sectori DCV? Sic. Addatur Sectori DCV totus Sector DPV, & detrahatur CYP, nam sic detracto a DCP trilineo CYP additur PQL. Quare etiam addito PQL ad triangulum DYP, fiet denuo Sector DCP. Quibus si addantur duo trilinea CYP, PQL quæ simul sumpta æquant Sectorem DPV, erit totum compositum æquale Sectori DCL. Quare etiam Sectores duo DCV, DLP una cum Sectore DPV æquales erunt triangulo DYQ. Quod erat demonstrandum.

Hactenus quidem demonstratio admittitur. Quod autem inde infert *Hobbesius* trilinea CYP, PQL esse inter se æqualia, *Wallisius* falsum esse dicit.

Sector DCL æqualis est tribus Sectoribus DCV, DVP, DPL. Centro V intervallo PQ describatur arcus Circuli secans DC productam in K. Erit ergo trilineum VKC æquale trilineo PQL. Cum enim rectæ PQ, VK sint æqualia, item arcus PL, CV æquales; etiam anguli tum ad C & L recti æquales, æqualia erunt ipsa trilinea. Et propterea æqualia etiam

sunt



ſunt triangula DPQ, DVK; & ambo ſimul æqualia triangulo DYQ; majora autem ſunt Sectore toto DCL tanto quantum eſt duplum trilineum PQL mulctatum Sectore DPV. id eſt Sector DCL æqualis eſt duplo triangulo DPQ plus DPV— 2 PQL.

Rurſus, jungatur *q*V. Cum ergo D*q*, per conſtructionem, æqualis ſit DY vel YQ, erit *q*V æqualis YP ſive PQ; adeoque *q*VK eſt una linea recta; & triangulum D*q*K diviſum bifariam a recta DV; idemque æquale triangulo DYQ; & Sector DPV duplicatus eſt per ſuperpoſitionem; & triangula D*q*V, DYP æqualia tum inter ſe tum triangulo DPQ.

Eſt autem Sector DCL æqualis duobus triangulis D*q*V, DYP † duplo DYP—DPV Sectore, propter Sectorem DPV triangulis D*q*V, DYP immerſum, & bis numeratum. Quoniam ergo idem Sector DCL æqualis oſtenſus eſt duplo triangulo DPQ † DPV—2 PQL; & eſt duplum triangulum DPQ æquale duobus triangulis D*q*V, DYP, erit duplum trilineum CYP—DPV æquale Sectori DPV— 2 PQL. Habemus ergo æquationem hanc

$$2\,CYP - DPV = DPV - 2\,PQL.$$

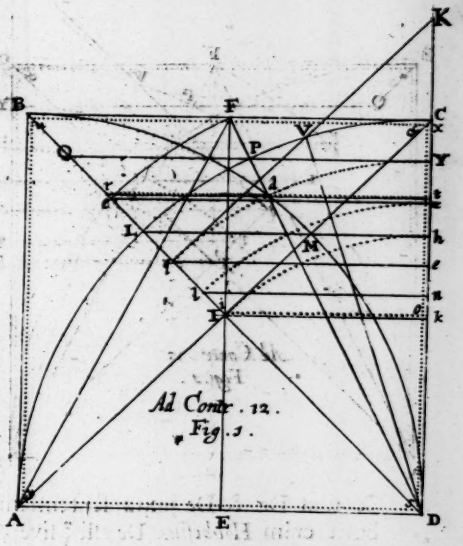
Quare cum mediæ quantitates, — DPV & DPV ſimul additæ æquales ſunt nihilo, 2 CYP & — 2 PQL faciunt nihil. Sunt ergo CYP, PQL trilinea æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Itaque inventa eſt ab *Hobbeſio* non modo ratio circumferentiæ circuli ad lineam rectam, ſed etiam aréæ quadrantis ad quadratum ipſi circumſcriptum.

Manifeſtum ergo eſt, quæcunque proferuntur in contrarium eſſe falſa. Proferuntur autem in contrarium ab *Walliſio*, Primò, demonſtratio Archimedis per numerorum radices; quæ ad controverſiam quartam clariſſime oſtenditur eſſe invalida. Secundò, Euclidis propoſitio viceſima Elementi ſexti, qua affirmat rationem quadrati ad quadratum duplicatam eſſe rationis lateris ad latus. De qua dicemus paulo poſt. Repugnat enim non ſolum longitudini circumferentiæ circuli inventæ ab *Hobbeſio*, ſed etiam

am propositioni 19 Roseti qua inventæ sunt duæ mediæ inter rectam datam & ipsius dimidiam; idque sola additione & substractione, ubi minus pronum est errare.

Quare hoc loco vindicanda est Prop. 19. Roseti, & demonstrandum quod quatuor rectæ DC, Zc (vel DZ) De, Dk sunt continuè proportionales. Quod sic demonstro.



Recta Lh secet arcum BD in M; erit ergo Dh media proportionalis inter DC & Dk, utpote æqualis semidiagonali DI. Sunt ergo DC, Dh, Dk continuè proportionales; & ut DC ad Dh, sive ut Dh ad Dk, ita est differentia Ch ad differentiam hk. Est autem CM media proportionalis inter duplam Ch & ipsam Ch; quia Ch, hM sunt æquales. Item, ductâ DM secante Ik in N, erunt kh, kN æquales; item Nh, hC æquales. Ratio ergo rectæ DC ad Dk duplicata est rationis Ch ad hk.

Quoniam ergo ostensum est ad controversiam 8, arcum BD vel CA æqualem esse radio BC & Tangenti 30 graduum simulsumptis, & rectam Dz vel ze esse dimidium arcus BD; & (ad Controversiam 9) rectam Ch æqualem esse dimidiæ Tangenti 30 graduum, erit kz æqualis Ch & propterea Cz æqualis kh.

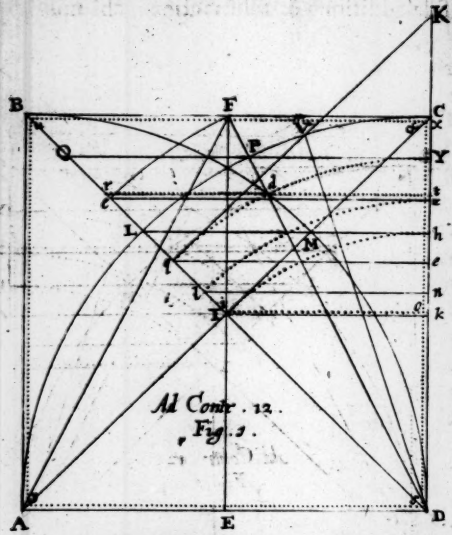
Est ergo ratio DC ad Dk id e[illegible] hC duplicata rationis kz ad zC.

Quare recta DB ad DI id est ad ID, duplicata est rationis Ie ad eB; & Ie æqualis BL; item IL, Be æquales.

Inter Dk & Dz sumatur media proportionalis De; eritque ut Dz ad De, ita differentia Ze ad differentiam eh. Quoniam ergo ratio DC ad Dz duplicata est rationis Dz ad De; & DC ad Dk duplicata rationis Dz ad DC, erunt Dk, De, Dz, DC, ut etiam earum differentiæ ke, ez, zC continuè proportionales; & sunt eædem quæ in figura propositionis 19 disponuntur in triangula similia. Quare Prop. Roseti 18 & 19 judico esse bene demonstratas.

Quid ad hæc *Wallisius*? Quin Dz sit major duarum mediarum proportionalium inter DC & Dk negare non potest, propter demonstratio-

nis evidentiam. Dicet forte mediam minorem non esse ipsam De. Ergo demonstretur etiam hoc, Nempe esse ut primam DC ad secundam Dz, ita De ad quartam Dk. Ut enim semidiameter DC ad semissem arcus quadrantis a se descripti, sic semidiameter alia quæcunque ad semissem arcus quadrantis itidem a se descripti. Est autem recta De semidiameter arcus quadrantalis æqualis rectæ DC. Cum ergo Dz sit semissis arcus descripti a DC, & Dk semissis arcus descripti a De, erit De vel nulla, mediarum minor inter DC & Dk.



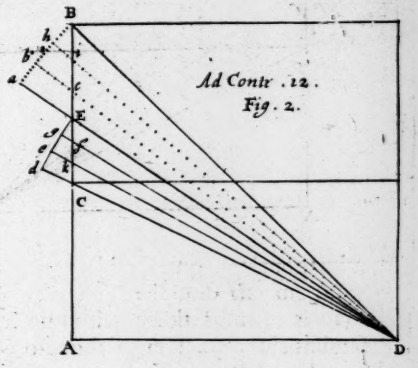
Ad Conic. 12. Fig. 3.

Sed quatuor illas quantitates DC, Dz, De, Dk dicit *Hobbesius* non tantum esse in ratione continua, sed etiam in ratione 5 ad 4; & sunt Dz & De juxta sententiam amborum in ratione 5 ad 4. Probavit enim *Hobbesius* De esse $\frac{2}{5}$ sive $\frac{4}{10}$ arcus BD; & Dz esse ejusdem arcus semissem, id est $\frac{5}{10}$. Sed quod radius DC ad Dz sit ut 5 ad 4, id *Wallisius* dicit esse falsum, quia Dd quæ ad rectas DF, DP, est tertia proportionalis secat arcum BD supra rectam ze in d. Inde enim sequitur Dz minorem esse quatuor quintis altitudinis quadrati totius ABCD; & proinde neque quatuor rectas DC, Dz, De, Dk, esse continuè proportionales; neque quadratum a DY æquale esse quadranti ABD. Incumbit ergo illis qui hæc *Wallisii* sustinere volunt, indicare in demonstrationibus meis Assumptum aliquod falsum vel consequentiam illegitimam, & mihi in Assumptis & consequentiis *Wallisii*. Alioqui enim finiri controversiam impossibile esset.

In demonstrationibus ergo meis Assumptum vel Illationem falsam ostendat quicunque potest, & quando libitum est; ego interea (postquam doctrinam hanc paucis propositionibus amplius confirmaverim) Principia falsa quæ sunt in *Wallisii* objectione, quantum opus est indicabo. Ostendam autem primò differentiam inter rectam & maximam mediarum duarum inter se & sui semissem, æqualem esse differentiæ inter mediam inter duas extremas & minimam.

Inter

Inter rectam datam & ipsius semissem; invenire duas medias proportionales; & demonstrare quod differentia inter totam & maximam mediarum æqualis est differentiæ inter Mediam & minimam.



Ad Contr. 12. Fig. 2.

Sint datæ AB & AC & sit illa hujus dupla. Inveniatur inter illas Media AE. Fiat BAD angulus rectus, & AD æqualis AB; jungaturque BD. Centro D radio DB describatur arcus B*a*, quem ducta & producta DE secet in *a*. Secetur arcus B*a* in tres partes æquales B*h*, *hb*, *ba*. Secet autem recta D*b* rectam AB in *c*, & D*b* rectam eandem in *i*.

Similiter, radio DE describatur arcus E*d*, cui ducta DC occurrat in *d*, secetur que arcus E*d* in tres partes æquales quarum E*e* sint duæ, & E*g* una; ducanturque rectæ D*e*, D*g* secantes A*e* in *f* & *k*.

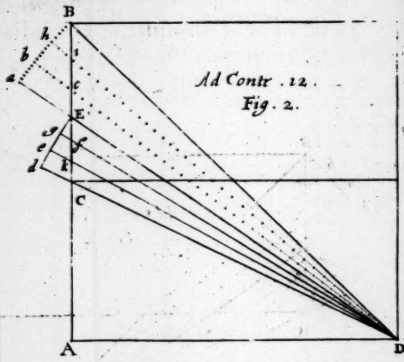
Dico rectas A*e*, A*f* esse duas Medias inter AB & AC quæsitas.

Quoniam enim angulus BD*b* divisus est bifariam a recta D*i*, erit (per El. 6. Prop. 3.) ut DB ad D*c* ita B*i* ad *ic*. Similiter quia recta D*e* divi-dit angulum *i*DE bifariam, erit ut D*i* ad DE ita *ic* ad *c*E. Sunt ergo B*i*, *ic*, *c*E continuè proportionales; & propter eandem causam E*f*, *fk*, *k*C continuè proportionales.

Sed ut AB ad AE, ita est AE ad AC, per constructionem; & ita BE. differentia ad EC differentiam. Quare recta DE dividit angulum BDC bifariam; & sunt tres anguli ED*f*, *f*D*k*, *k*DC tribus angulis BD*i*, *i*D*c*, *c*DE singuli singulis æquales. Sunt ergo D*i*, *ic*, *c*E, E*f*, *fk*, *k*C continuè proportionales. Quare & altitudines AB. AB minus B*i*. A*i* minus *ic*. A*c* minus *c*E. AE minus E*f*. A*f* minus *fk*. A*k* minus *k*C sunt septem continuè proportionales. Sunt ergo AB. A*c*. A*f*. AC quatuor continuè proportionales, quarum duæ mediæ sunt A*c*, A*f*. Inventæ sunt ergo inter rectam datam & sui semissem duæ mediæ proportionales.

Probandum restat quod B*c* (differentia inter primam ex illis quatuor & secundam) æqualis est CE (differentiæ inter mediam AE & minimam AC, nempe rectæ CE; quod sic ostendo. Quoniam ratio AB ad AC du-

plicata



plicata eſt rationis AE ad AC, etiam ratio AB ad CB (cum AC, CB ſint æquales) duplicata eſt rationis AB ad CB; & propterea duplicata etiam rationis BE ad EC. Si ergo ſumatur, a puncto C verſus B, recta quædam æqualis BE, illa erit Cc, & reliqua cB æqualis CE.

Ex hac demonſtratione manifeſtum eſt, rectam quæ æqualis ſit dimidio arcui quadrantis, eſſe ex duabus mediis inter radium & ſemiradium, majorem. Oſtenſum enim eſt ad controverſiam nonam, differentiam inter radium & ſemidiagonalem (quæ ſemidiagonalis media eſt inter radium & ſemiradium) æqualem eſſe dimidiæ Tangenti 30 graduum. Cum igitur arcus quadrantis oſtenſus ſit æqualis radio & tangenti 30 graduum ſimul ſumptis; ſemiſſis ejus æqualis erit ſemiradio & differentiæ inter radium & ſemidiagonalem; & (per conſequens) differentiam inter radium & ſemiſſem arcus quadrantis æqualem eſſe differentiæ inter ſemidiagonalem & ſemiradium.

Oſtendam ſecundò, ex conſtructione *Hobbeſiana* ad cap. 22. Libri de Principiis Geometriæ, non modo arcum quadrantis æqualem eſſe radio & Tangenti 30 graduum ſimul ſumptis; ſed etiam ſectionem anguli dati in ratione data; & arcui dato æqualem exhibere rectam; & contrà datæ rectæ æqualem arcum; & Polygonum conſtruere æquilaterum quodcunque.

Conſtructio

Conſtructio Figuræ.

ABCD eſt Quadratum, diviſum ab EF parallela lateri AB bifariam, & BD arcus Quadrantis ſecans EF in G. Quare IG Sinus arcus BD eſt ſemilatus; & IA poteſt tria ſemilatera; & AN eſt dupla AI vel ON. Item ND eſt dupla AD, & AM tripla ejuſdem. Quare ND producta ad latus BC productum in L, erit CL Tangens 30 graduum; & IK æquale lateri, & KM æquale ſemilateri. Itaque DL eſt Secans 30 graduum; cui æqualis per G ducitur AH. Itaque BH eſt Tangens 30 graduum, eademque dimidia Secantis AH; & ſunt AH, DL parallelæ.

AT eſt duæ tertiæ ſemilateris AE, id eſt una tertia totius lateris AB. Itaque juncta NT & producta ad latus BC in *q* tranſibit per G, & erit B*q* tertia pars totius rectæ BL. Quoniam enim AT eſt tertia pars lateris AD, & producta ND determinat IM tria ſemilatera, producta NT determinabit unum ſemilatus IG. Quare & B*q* erit tertia pars totius BL. Præterea F*q* eſt tertia pars FH; nam ut ET ad TG ita eſt F*q* ad GF, propter triangula GFQ, GET ſimilia.

Hactenus conſtructio, & ea quæ ex conſtructione ſequuntur immediatè, & maximè manifeſta. Venio ad Theoremata difficiliora.

PROP. I.

Recta quæ ducitur a puncto N *tranſitque inter* A *&* T, *dividit rectam* AT *& Arcum* BG, *& rectas* IG, B*q in rationes eaſdem.*

SUper rectam AT deſcribatur arcus quadrantalis ST. Cum ergo AT ſit tertia pars lateris AD, erit arcus ST tertia pars arcus BD, id eſt, æqualis arcui BG. Quare ſi puncta S & T intelligantur ferri per rectas AB & TG ad puncta B & G, terminabitur inter illa arcus ST. Similiter ſit AZ ſemiſſis AT, & YZ arcus quadrantalis. Erit igitur arcus YZ æqualis ſemiſſi arcus BG. Secetur arcus BG bifariam in *h*, ducaturque Sinus ejus *ah* Erunt igitur AZ, *ah* parallelæ; & quia *ah* Sinus dimidii arcus BG eſt æqualis (ut notiſſimum eſt) dimidiæ chordæ BG, producta *ah* ut ſit ſui ipſius dupla, occurret rectæ NG productæ in *k*, propterea quod AT, eſt dupla AZ.

Similiter, ſi ſumatur B*f* tertia pars BG, id eſt pars nona arcus BD, & *ac* ſit arcus quadrantalis, erunt arcus *ac* & B*f* æquales, & A*c*, *bf* parallelæ, & in ratione NA ad N*b*. Itaque ducta N*c* & producta tranſibit per *f*. Itaque producta *bf* ut ſit ſui tripla terminabitur in N*q*; & eadem *bf* noncuplata terminabitur ad NL in *e*, & *ah* ſextuplicata terminabitur in eadem NL ad *d*.

Tertiò, Si ſumatur B*i* duæ tertiæ arcus BG, & recta AX duæ tertiæ AT, & Sinus ejus *pi*; & arcus VX ſit quadrantalis, erit ut NA ad N*p* ita AX ad *pi*. Ducta ergo NX & producta tranſibit per *i*.

Eodem modo oſtendi poteſt rectam ab N ſecantem quamcunque partem rectæ AT, puta A*r*, abſcindere ab arcu BG arcum æqualem arcui quadrantali deſcripto ab ipſa A*r*. Junctâ enim NF ſecante AT in *r*, & arcum BG in *s*, cum AX B*i* ſint in ratione AB ad BD, manifeſtum eſt partes X*r*, RT proportionales eſſe partibus *is*, *s*G; & propterea in ratione radii ad arcum quadrantalem; & propterea arcus quadrantales deſcriptos ab X*r* & *r*T æquales eſſe arcubus *is*, *i*G.

Cor. Conſtat hinc rectas ductas ab N. ad latus BC abſcindere partes BP, BQ, BR, BF, B*q* partibus A*c*, A*z*, AX, A*r*, AT proportionales, eaſdemque partibus cujuſcunque parallelæ interceptis inter NB & N*q*, ut *ll*, *hm*, *mn*, *ns*, eſſe proportionales.

PROP. II.

Recta BL *eſt æqualis arcui* BD.

MAjor enim eſt recta BL quam IM, id eſt quam tres Sinus arcus BG. Major item eſt eadem BL quam ſex Sinus arcus B*h*, id eſt quam *a d*. Major etiam eadem eſt quam 12 Sinus dimidii arcus B*h*. Major quoque quam 24 Sinus quartæ partis arcus BG; & major quam 48 Sinus partis octavæ arcus BG. Similiter, ſi biſecentur partes aliquotæ arcus BG quoties fieri poteſt, ita ut inter punctum B & chordam ipſius differentia nulla ſit; toties multiplicata minima (ſumpta ut una recta) terminabitur in L. Quod ſi dicatur nulla biſectione fieri poſſe ut chorda & ipſius arcus ſint æquales, ſed majorem ſemper fore arcum quam chordam ejus, tunc arcus totus non eſt biſectus toties, quoties fieri poteſt. Quod eſt contra ſuppoſitum. Eſt ergo recta BL (quæ componitur ex Radio & Tangente 30 graduum) æqualis arcui quadrantis BD, ut methodo eadem, Cap. 22. Libri de Principiis Geometriæ, demonſtravit *Hobbeſius*.

PROP. III.

Datum angulum dividere in data ratione.

SIt data ratio PF ad BP. A puncto F ad N ducatur recta FN ſecans arcum BG in *s* & AT in *r*. Ducatur item PN ſecans arcum eundem BG in *f*, & rectam AT in *c*. Ergo (per primam) arcus *fs* eſt ad arcum B*f* ut FP ad BP. Sed ut arcus *fs* ad arcum B*f*, ita eſt angulus PAF ad angulum BAP. Quare ut angulus *s*A*f* ad angulum *fa*B, ita eſt recta PF ad BP. Diviſus ergo eſt angulus datus BA*s* in angulos duos

*s*A*f*,

sAf, *f*AB in data ratione FP ad BP. Quod erat faciendum.

Notandum autem eſt, quando angulus datus major eſt quam tertia pars recti, ſumenda eſt pars ejus aliquota, quæ minor ſit quam BG, & duplicanda vel multiplicanda per partium numerum.

PROP. IV.

Arcui dato invenire rectam æqualem, & rectæ datæ æqualem arcum.

SIt arcus datus B*s*; ducaturque N*s* & producatur ad latus BC in F. Erit ergo BF æqualis arcui B*s*, per primam. Sit deinde data recta BC latus; ſumaturque ſemiſſis ejus BF. Ductâ ergo FN, ſecante arcum BG in *s*, erit (per primam) arcus B*s* æqualis rectæ BF; & duplicata B*s* in *t* erit arcus B*t* æqualis lateri BC. Erit quoque arcus D*t* æqualis rectæ CL Tangenti 30 graduum, ſive rectæ *Dn*.

PROP V.

In Circulo deſcribere Polygonum regulare, numerum laterum habens datum.

EXempli gratia, deſcribendum ſit in Circulo cujus Radius eſt AB Heptagonum regulare.

Sumatur a puncto B ſeptima pars rectæ B*q*; datur enim pars ſeptima rectæ cujuſcunque. Datur ergo pars ſeptima arcus BG, quam abſcindet ducta recta a puncto N ad partem ſeptimam arcus BG. Eſt ergo arcus BG ſimul cum quinque ſeptimis æqualis duodecem ſeptimis arcus BG. Eſt autem tota perimeter deſcripta ſemidiametro AB duodecupla arcus BG. Eſt ergo tota perimeter ſeptupla arcus qui componitur ex duodecem ſeptimis arcus BG. Datur autem arcus duodecuplus ſeptimæ partis arcus DG. Datur ergo ſeptima pars totius perimetri. Datur ergo & latus Heptagoni deſcripti in Circulo cujus radius eſt AB.

Itaque quartæ partis, atque adeo totius perimetri longitudinem demonſtratione hac altera (ſumpta ex capite 20 libri *Hobbeſii* de Principiis Geometriæ, &c.) determinavimus & demonſtravimus æqualem eſſe rectæ compoſitæ ex ſemidiametro & Tangente 30 graduum; & propterea ſemiſſem ejus æqualem eſſe (ut in Roſeto demonſtratur) rectæ cujus quadratum æquale eſt decem quadratis a quarta parte ſemidiametri; & quia demonſtratum etiam paulò antè eſt quadratum a recta quæ ſit æqualis ſemiſſi arcus quadrantis eſſe ad quadratum ſemidiametri ut 4 ad 5, neceſſe etiam eſt longitudinem ſemidiametri eſſe ad longitudinem ſemiſſis arcus quadrantis ut 5 ad 4. Debet igitur *Walliſius* vel acquieſcere in demonſtrato, vel in demonſtratione detegere Paralogiſmum. Sed

neque

neque detexit quiſquam, neque detegere poteſt, propter demonſtrationis perſpicuitatem. Venio nunc ad Objectionem *Walliſii* ſumptam ex eo quod quatuor quintæ ſemidiametri majus eſt quam ſemiſſis arcus quadrantis, oſtendam ergo primò invalidum eſſe, & conſequentiam falſam.

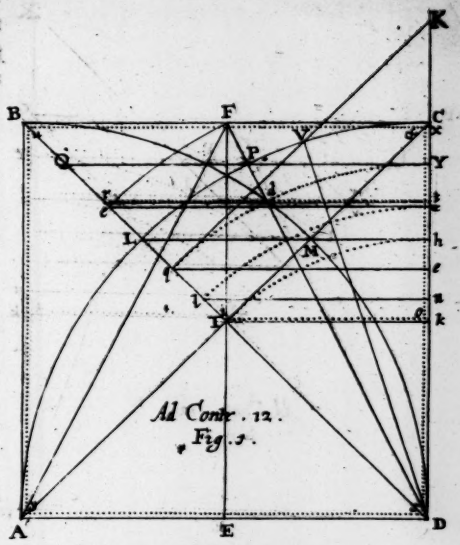
Siquidem enim per Latus Longitudinem ſemidiametri intelligat circuli quadrato inſcripti, & ſine latitudine; ſequetur manifeſtè (quoniam longitudo ſine latitudine nihil eſt) latus quadrati eſſe nihil, neque omnino habere quantitatem, id eſt nullum eſſe quadrati latus.

Deinde ſi cogitetur quadratum terminari undiquaque quatuor rectis æqualibus ſine latitudine; haberet quadratum ſic fictum angulos nullos. Nam angulus a duobus nihilis conſtitui non poteſt, neque quadratum a Diagonali dividi, quia ſimul dividenda eſſent puncta angularia, quæ ſupponuntur indiviſibilia. Etiam puncta ſive minima Linearum, Quadratorum, & Cuborum eſſent inter ſe æqualia. Præterea, lineam ſine longitudine exiſtere ne cogitabile quidem eſt; ſed quoties ſupponitur, dicitur tantùm, ita ut nihil inde affirmati deduci poſſit, neque ab eo ſuppoſito quicquam confutari. Adde quod linea ſine latitudine ne duci quidem poſſit, & proinde illis qui inde aliquid demonſtrare cupiunt, ſine diagrammate demonſtrandum eſt. *Walliſius* igitur, ſi longitudinem ſemidiametri pro latere quadrati ſumpſit more ſuo, nihil egit. Sin lateri latitudinem concedat & (per conſequens) etiam diagonali; concluſionem *Hobbeſii* infirmare non poteſt. Oſtendam ſecundo.

Quod quatuor quintæ radii non eſt major duarum mediarum inter radium & ſemiradium.

Repetatur

Repetatur jam figura controversiæ hujus 12 primæ, in qua ducta per *d* recta parallela BC, secat diagonalem BD in *r*, & DC in *t*. Est autem D*t* quatuor quintæ semidiametri DC, sive (ut vulgo vocant) lateris Cubi a DC.

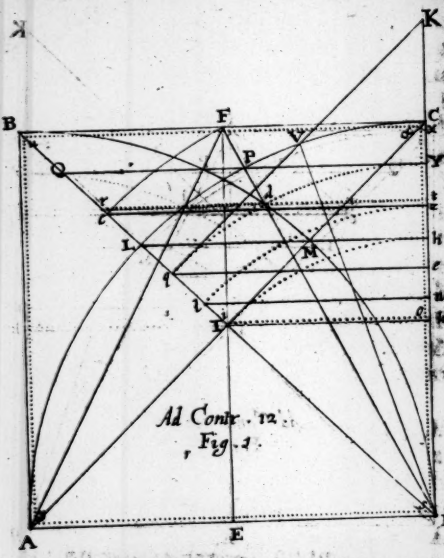


Quoniam enim AB, sive DC est ad D*t* sive *tr*, ut 5 ad 4, id est ut 10 ad 8, & quadratum a DC est 100, erit quadratum a D*t* 64; & Cubus a DC 1000 quorum Cubus a D*t* est 512. Sed Cubus a D*k* est pars octava Cubi a DC nempe 125. Est autem 512 majus dimidio Cubi a DC quantum est 12; quia 1000 duplum est 500. Similiter Cubus a D*t* pro dimidio debet habere 256, quod majus est dimidio Cubi a media majore, nempe 250 quantum est 6. Et denique Cubus qui ad DC, & D*t* sive ad 512 & 256 est tertius proportionalis, nempe 128 major est Cubo a dimidia semidiametro, nempe 125, quantum est 3.

Non est ergo recta D*t* sive *tr* major duarum mediarum inter totam DC & ejus dimidiam D*k*, sed illâ major, quantum est duodecem milleſimæ partes Cubi a tota DC; sive quantus est Cubus a duabus centesimis ipsius DC. Nam quadratum a duabus centesimis rectæ cujuscunque æquale est quatuor centesimis quadrati totius; & quadratum diagonalis ejus potest 8, quorum duæ centesimæ potest 4. Itaque super quadratum ab illis duabus centesimis si construatur Cubus, manifestum est ex El. 13. Prop. 13. quod Cubi istius diameter potest 12, quorum duæ centesimæ Radii (ut una recta) potest 4. Demonstravimus ergo quatuor quintas semidiametri, duarum mediarum inter Radium & Semiradium majore, majus esse, & quanto; supponentes Radium divisum in partes æquales decem.

Supponatur rursus semidiametrum divisam esse quinquifariam. Quadratum ergo a Radio erit 25, id est quadrata 25 in quintam partem sui ipsius ducta; & Cubus ab ipso Radio 125 Cubi ab eadem quinta parte. Hujus semissis est $62\frac{1}{2}$; hujus iterum semissis $31\frac{1}{4}$; & hujus denique semissis $15\frac{5}{8}$; qui numerus est pars octava totius Cubi 125. Est ergo ratio Cubi a radio ad partem sui octavam, id est, ad Cubum a semiradio in triplicata ratione 5 ad 4. Sed ratio DZ sive Z*c* ad D*e* sive *eq*, est ut 5 ad 4,

 quia



quia De, DL, Dq ſunt in continua ratione 5 ad 4 (confitente *Walliſio*.) Ratio ergo lateris totius Cubi a ſuo latere, triplicata eſt rationis DC ad DZ. Quare erit ut DZ ad De, ita tum DC ad DZ, tum De ad Dk, ut demonſtravit *Hobbeſius*. Ex eo igitur quod latus quadrati ſtatuitur eſſe nihil, id eſt ſine latitudine, non modo deſtruitur veritas recepta de ratione inter ſe Cuborum, ſed etiam confirmatur Prop. Roſeti 19ª, quam voluit *Walliſius* ab ἔνστασις ſive non-latitudine lateris confutare.

Quoniam autem ſemidiagonalis Lb eſt media proportionalis inter extremas DC & Dk, ſi Cubi ſunt in triplicata ratione laterum ſine latitudine, erit eadem Lb media quoque inter mediam majorem & minorem; ſed illa media eſt inter DZ & De. Quare (cum DZ ſit ad De ut 5 ad 4) erunt ipſæ DZ, De duæ mediæ quæſitæ.

Manifeſtum ergo eſt rectam Dt non eſſe duarum mediarum inter DC & Dk majorem; nec DZ latus Cubi æqualis dimidio Cubo ab AB.

Idem etiam per partium aliquotarum numeros manifeſtum eſt. Cum enim DC ad Dt ſit ut 5 ad 4 id eſt ut 10 ad 8, vel 50 ad 40, & ut 50 ad 40 ita 40 ad 32 & ita denique 32 ad 25⅗, numerus 50 deberet eſſe duplus numeri 25⅗; ſed duplus eſt numeri 25. Quare Dt major eſt quam major mediarum inter DC, Dk.

Cauſa autem erroris hujus alia non eſt quam quod linea (a definitione Euclidis non ſatis intellecta) habita eſt a pleriſque pro longitudine ſine latitudine. Quanquam enim in menſurandis rectangulis latitudinem computandam non eſſe verum ſit, in comparandis tamen ſuperficiebus definitio illa locum nullum habet; quia longitudo & ſuperficies ſunt, per ipſum Euclidem, diverſa genera quantitatis. *Walliſius* igitur cum ſupponeret lineam diviſibilem in partes infinitè exiguas, non potuit in hac quæſtione non errare.

Euclides enim in El. 1. demonſtravit parallelogramma ſub eadem altitudine & baſibus æqualibus eſſe inter ſe æqualia. Ergo parallelogrammum ſub AB & ejus parte infinitè exigua, æquale eſt parallelogrammo

ſub

ſub AF & eadem baſe, nempe infinitè exigua; & per conſequens AB & AF eſſent æquales. Quod eſt abſurdum, ab *Walliſio* non animadverſum.

Dico tertiò latus quadrati ABCD (ſi modo Cubus ejus ad Cubum qui ſit ſemiſſis ejus debet habere rationem laterum triplicatam) latitudinem habere eam quam habet Trapezium *ztrc*.

In recta *c*B ſumatur *cu* æqualis *r*B. Erit ergo tum *r*B tum *cu* quinta pars diagonalis DB; & propterea Trapezium C*xu* B ad Trapezium *t*Z*cr* ut 5 ad 4. Sed *ze* ad *eq* eſt ut 5 ad 4; quia diagonales D*e*, D*q* ſunt ut 5 ad 4. Sunt enim illæ æquales rectis DF, D*d*.

Sumatur quarta pars ſemiradii D*k*, & collocetur a puncto *e* verſus *k* in *o*, ducaturque *oi* parallela CB ſecans diagonalem DI in *i*.

Quoniam ergo oſtenſum eſt ad controverſiam octavam, rectam Z*e* æqualem eſſe ſemiſſi arcus quadrantis deſcripti radio DC; & arcum quadrantis deſcripti a D*e* æqualem eſſe ipſi radio DC; erit D*k* vel *k*I æqualis ſemiſſi arcus deſcripti a D*e*. Cum ergo ſit ut DC ad ſemiſſem arcus quadrantalis a ſe deſcripti; ita D*e* vel *eq* ad ſemiſſem itidem arcus quadrantalis a ſe deſcripti; erit ut DC vel CB ad Z*e*, ita *eq* ad *k*I.

Quare recta DC (quod revera eſt rectangulum) una cum Trapezio C*xu* B eſt ad D*t* una cum Trapezio *tzcr* ut 5 ad 4. Rurſus recta D*z* (quod revera eſt rectangulum) eſt ad *eq* ut 5 ad 4; & denique *eq* ſive D*e* una cum Trapezio *ok*I*i* eſt ad *k*I ſive D*k* ut 5 ad 4. Itaque ſi ducantur tres rectæ *uy*, *ys*, *s*a parallelæ rectis AB, AD, DC ſecantes diagonales in *y*, *s*, a habemus quatuor Trapezia C*xu*B, B*uy*A, A*ys*D, *s*D*a*C æqualia pro quatuor lateribus quadrati ABCD in ſubtriplicata ratione radii DC ad ſemiradium D*k*.

Itaque Objectio *Walliſii* non impedit quin ſemiſſis arcus quadrantis ſit major duarum Mediarum continuè proportionalium inter radium & ſemiradium. Quapropter propoſitiones decimam octavam & decimam nonam Judico ab *Hobbeſio* eſſe bene demonſtratas. Cauſam autem quare *Walliſio* aliter viſum eſt, aliam non fuiſſe quam quod quadrati magnitudinem computari poſſe exiſtimavit per longitudines ſine latitudine, id eſt: per diverſi generis quantitatem; quod eſt impoſſibile.

Cor. Minor mediarum duarum inter rectam totam & dimidiam eſt ſemiſſis diagonalis quadrati quod ſit quatuor quintæ partes quadrati a tota. Nam *eq* quæ eſt minor Mediarum inter DC & ſemiſſem ejus D*k* eſt dimidia DQ ſive dimidia DK (ſunt enim DQ & DK æquales propter ſimilia & æqualia triangu'a DYQ, D*q*K.) Quia enim anguli deinceps ad *e* ſunt recti, & anguli ad D & K ſemirecti, neceſſarium eſt ut D*e*, *e*K ſint æquales.

CON-

CONTROVERSIA XIII.

CONtra Propoſitiones 20 & 21 *Wallisius* nihil objicit præterquam quod dependeant a Prop. 18, id eſt, quod dependeant a veris & perſpicuè demonſtratis. Nam quæ reprehendit in ſcriptione verba quædam præter ſcriptoris mentem (quoniam illis nunc correctis procedit demonſtratio) nihil agunt. Hactenus de controverſiis ſingulis, excepta illa quæ eſt de natura Libræ quam cum cenſuræ *Hobbeſii* ut contemnendæ reſpondere non dignatur, una cum Roſeto ipſo cum hoc ſcripto meo colligari curavi. Reſtant pauca univerſim circa ipſorum de Scientiis merito dicenda, nempe quantum ſerviat reſponſioni ad Epiphonema *Wallifii* ad finem libelli ſui in tranſactionibus Societatis Regalis editi in hæc verba: *Nam jamdiu eſt quod* Hobbii *Authoritas in Mathematicis ne hilum valuerit; ejuſque ratiocinium tantundem.*

Verum quidem eſt, nec authoritatem nec ratiocinationem in Mathematicis *Hobbeſii* apud Anglos; nec apud exteros, *Wallifii* multum valuiſſe. Exteri a Demonſtrationibus Geometras; apud nos omnes ab auditione & ab Authoritate Academicorum judicant. Itaque *Hobbeſius* extra legitur, intelligitur, laudatur; *Wallifius* nuſquam legitur, a nemine intelligitur, ne a ſeipſo quidem, & in ſola Anglia laudatur. A quibus? A Geometra (quantum ſcio) nemine. A quibus ergo? A multitudine hominum non Geometrarum, quos in alio genere doctrinæ ſcribens *Hobbeſius* viſus eſt læſiſſe. Non ergo a contemptu eſt quod *Wallifio* in Geometricis non anteferatur, ſed a Vindicta. *Hobbeſii* enim inventa tum in Geometria tum in Phyſica multa, nova, excelſa, clara, utilia ſunt. *Wallifii* contrà, inventa nulla, ratiocinatio falſa, Principia abſurda, Definitiones ſutiles, nihil novi præter monſtra. Mirandum igitur eſſet, qui aut illum legiſſent, aut *Hobbeſio* non male voluiſſent, ſi non cathedra illa Geometrica celeberrima depuliſſent. Faciet enim temeritate & imperitia ſua, ſi paulò diutius illam retineat, perire apud nos ſcientiam utiliſſimam, præterquam quantum jamdiu didicerunt homines Mechanici. Ego vero inter temporum illorum calamitates non minimam eſſe exiſtimo, quod ad beneficium illud Savilianum Nobiliſſimum admiſſus fuerit, qui cum juvenis Oughtredi Arithmeticam didiciſſet, & veterum Geometrarum Propoſitiones (ſine demonſtrationibus) percurriſſet; aſſumpta Cavallerii doctrina indiviſibilium, quam non intellexit; ea inſtructus ſupellectile ad Profeſſoratum Geometriæ totius o bis clariſſimum aſpiravit, partiumque favore prævalentiam obtinuit, & quorundam characterum vulgo incognitorum præſtigiis nomen obtinuit apud diſcipulos & condiſcipulos ſuos,

&

& vulgus imperitum, peritiſſimi Geometræ, docuitque non (ut per inſtitutionem debuit) Euclidis Geometriam, ſed ſui ipſius monſtra & deliria. A quibus cum ſcripta *Hobbeſii* diſſentirent, ſcripto Elencho ruſticitate, & ſcurrilitate, id eſt ſtultorum facetiis differto, in illum invehitur, partim ingenio ſuo, partim ab *Hobbeſii* (quos dixi) inimicis animatus. *Hobbeſius* autem nec lucri nec gratiæ cauſa, ſed ſciendi ſolo amore ſcripſit quæ ſcripſit omnia. Talia autem ſunt, ut nec ætas prior majora vidit, nec (quantum conjicio) futura confutabit aut extinguet.

Ad Lectores Admonitio.

HAbuimus (ſtudioſi Lectores) Scientiarum humanarum, Geometriæ dico & Phyſicæ) per longiſſima ſecula Magiſtros peritiſſimos; præſertim verò Geometriæ Euclidem, Archimedem, Appollonium, Pappum alioſque a Græcia veteres; Cavallerium, Torricellium ab Italia recentiores. In Phyſica, id eſt, in doctrina de Motu, qua rerum omnium naturalium continentur cauſæ, innitiati fuimus a Copernico; proceſſimus (impedientibus quidem illis qui Scientias ſuſceperant promovere) proceſſimus tamen ſub Galileo. Hodie (non dico conſiſtimus) ſed relabimur. Quare autem? Quia qui Scientiæ ipſi ſtudent pauci, qui Scientiarum profeſſione quæſtum faciunt innumeri ſunt. His ſimul ac Magiſtrorum ſuorum doctrinam edidicerint, etſi ſenſum & vim illius non percipiant, pro omni argumento ſufficit authoritas Magiſtri; dicit Ariſtoteles. Eſt Euclidis. Eſt Archimedis; aliquando etiam ubi ſummi illi viri nihil tale ſenſerint aut ſcripſerint, more Philoſophorum illorum quos facete, ſed meritò deridet Lucianus; de quibus loquutus eſt Cicero, quando nihil eſſe tam abſurdum diceret quod ab aliquo Philoſophorum non ſit pronuntiatum. Sed, ne recedam a Geometris, Quid ſi Euclidem vel alium ex Magiſtris illis maximis in Demonſtratione erraſſe, aut voculam aliquam non ſatis accuratè definiiſſe, aut Poſtulatum juſto univerſalius poſtulare contigiſſet (poterant enim dum homines eſſent) nonne explicare, corrigere, prætermittere, aut denique abjicere illa ſatius eſſet, quam falſis falſa congerendo etiam vera abolere vel abſcondere? Euclides Lineam longitudinem eſſe definit ſine latitudine. Quis unquam latitudinem imaginatus eſt (imaginatus eſt

dico, non dico consideravit) sine latitudine ? Idem paulò post concedi sibi postulat, a Puncto ad Punctum duci posse Lineam. Quod est Postulatum iniquissimum & contra rationis naturalis lumen immediatum. Utrum jam æquius est dicere, Sensisse Euclidem Latitudinem Lineæ in æstimandis Superficiebus non considerandam esse, quam aut negare ducendæ lineæ possibilitatem, aut ab illo Principio procedere ad Demonstrationes ? Euclides Elem. 3. Prop. 16, angulum semicirculi quovis angulo acuto rectilineo majorem esse dicit, reliquum autem minorem. Inde infert Clavius (non ut absurdum) sed ut miraculum quoddam Geometriæ, Quantitatem minorem, continuo auctu, alium majorem superare posse, æquare tamen non posse ; quod est contra lumen naturæ immediatum. Erat tamen Clavius Geometra non indoctus. Sed ut sunt adeo excelsæ doctrinæ quædam, ita etiam sunt deliria aliqua ita magna, ut credi nisi Magistrorum ope nunquam possint. Nonne Professorem nostrum prius oportuit considerasse naturam anguli, tum rectilinei tum contingentiæ, utrum bene definiti & ejusdem generis essent, quam authoritate Clavii tam absurdum dogma docuisse ?

Rursus, Quod Numerus Linearum in seipsum vel alium Numerum Linearum multiplicatus producit Superficiem, nonne est contra lumen naturale ? Quid est aliud multiplicatio decem Linearum in decem Lineas, quam decem Lineas decies numerare ? An dicemus *Linies Lineam* producere aliquid ? Indoctus nemo, etsi oves suas sæpius numeret, sperare potest ut sic numeratæ mutent speciem & fiant boves. Non sunt hæc subtilia, sed absurda. Quanquam Oughtredus, Vieta, Regiomontanus, Copernicus, & ipse semel Archimedes latera Figurarum frustra numeris explicare tentaverunt, nunquam tamen docuerunt Radicem numeri esse Figuræ quadratæ latus, nec Geometriam dependere (ut docet *Wallisius*) ab Arithmetica ; neque numerum esse quo nihil numeratur.

Postremò, Quid tam contra lumen naturale immediatum esse potest aut absurdum, quam in serie quantorum infinita datum dicere esse ultimum, aut in publico Professore puerilius, quam per *Infinitum* intelligere se dicere *Indefinitum*, aut *quantum est possibile*, cum si sic dixisset, id quod demonstrare susceperat demonstrare non potuisset ? Neque vero istius *Quantum est possibile*, sive *Indefinitum*, datur ultimum. Datum enim non est quod non expositum est & cognitum. Quantum rerum Conditori possibile est, infinitum est. Quousque autem homo dividere potest ignotum est ; quare ejus quod potest *Ultimum* nec datur nec dari potest. Ipsius est singulare hoc Absurdum, nullo acceptum Magistro, sed ab ipso suppositum eo fine ut novum aliquod Theorema Geometriæ addidisse, aut melius quam alii demonstrasse videretur. Itaque non modo Scientiam utilissimam inscitia sua non promovit, sed relabi fecit, atque authoritate

tate Profeſſionis, quæ antea bene demonſtrata erant, diſcipulis ſuis dubia aut falſa videri fecit, nihil quidem ipſe in ulla parte operum ſuorum demonſtrans, aliena verò Paralogiſmis ſuis inquinans. Quapropter monendos vos cenſui, Lectores ſtudioſi, ut lecturi caveatis ne a falſis Principiis, & Hypotheſibus præſumtis decipiamini. Examinate diligentiùs Definitiones & Axiomata. Poteſtis enim. Afferte ad illa Ingenia veſtra. Non enim Artis ſunt, ſed prudentiæ naturalis. Tantum habent Authoritatis quantum vos vultis. Niſi vobiſmet ipſis clariſſima ſint, ne admittite. Si hoc feceritis, non facile Sophiſtarum Paralogiſmis decipiemini. Modo & Figura, homines maturi, non indigetis. Valete.

FINIS.

PRIMÆ PARTIS
DOCTRINÆ WALLISIANÆ
De Motu
CENSURA BREVIS.

Uem misisti mihi *Johannis Walisii* Libellum *De Motu* perlegi diligenter. Continet autem primam partem, nempe Doctrinam de *Librâ*. Reliquæ expectantur. Quæris quid censeam de prima. Non placet. Quæ clara sunt, obscura; obscura obscuriora facit.

Methodo quidem recta utitur procedens a Definitionibus, sed vitiosis, & quarum aliquæ ad demonstrationem nullam adhiberi possunt, quod & ipsum vitiosum est. Hujus generis est prima hæc Mechanicæ.

DEFINITIO I.

Mechanica est Geometria de Motu.

Quid hinc inferri potest quod conducat ad Doctrinam de *Librâ?* Etymologia ἀπὸ τῆς μηχανῆς quorsum attinet? Quo authore Geometra? Sed quid (inquies) accidit incommodi, si doceare obiter Grammaticam. At in hac quoque ineptit, *Mechanica* dicens *in Singulari, & Mechanica in plurali, ut & Logica in Singulari, & Logica in Plurali perinde esse*; cum notissimum sit ad Mechanicam & Logicam in Singulari subaudire Artem; ad Mechanica & Logica in Plurali intelligi Opera, Studia, Instrumenta, vel aliquid simile.

DEFIN. II.

Per Motum intelligo Motum Localem.

DEfinitio non eſt. Quid ergo iſtic agit? Diſtinguere voluit Motum localem à Generatione, Augmentatione, & Alteratione. Cur ergo non diſtinxit? Nam dum motus hos ad motum localem reduci poſſe dicit, non diſtinguit, ſed confundit; quia ad motum localem, niſi motus localis reduci nihil poteſt.

DEFIN. III.

Momentum appello id quod motui efficiendo conducit.

ID eſt Manus, Vectis, Arcus, & inſtrumentum omne quo ad movendum utimur, eſt Momentum. Ridiculum. Nondum intelligit, quid ſit Momentum. Momentum enim eſt ponderantis pro certo ſitu, certa ad movendum potentia. Nam ponderantis effectus major vel minor eſt, prout (in Libra) longiùs vel propiùs à centro Libræ diſtat.

DEFIN. IV.

Impedimentum eſt id quod Motui obſtat, vel cum impedit

VErbum *impedit* non rectè ponitur in Definitione *Impedimenti*. Ad duas has Definitiones, loco explicationis, qua valde indigent, nugas iterum ſubjicit Grammaticas vix puero dignas; nempe, *Momentum* à moveo, *Impedimentum* ab impedio, & hujuſmodi alia plura quàm viginti ad Subjectum ſuum nihil attinentia, ambitione puerili.

Deinde ad momentum refert Vim & Tempus. Ergo etiam ad motum efficiendum conducit tempus. Quomodo Tempus poteſt eſſe motus cauſa efficiens, intelligiſne tu? Etiam Vim motricem ad momentum refert, quæ in eodem movente ſemper eſt eadem. Momentum autem ejuſdem moventis (ut ſupra monui) variatur. *Reſiſtentiam* & *Diſtantiam* ad *Impedimentum*

dimentum refert; quasi Distantia [illegible] nihil moveri possit nisi à contiguo.

DEFIN. V.

Vim Motricem, vel etiam vim simpliciter, appello, Potentiam efficiendi motum.

NOn video differentiam inter Definitionem hanc & illam *Momenti*, nisi potentia movendi ad motum non conducat.

DEFIN. VI.

Per Tempus intelligo Temporis spatium id in quo Motus transigitur.

HOmo ineptus, ut sciam quomodo intelligit Tempus, intelligere se dicit Temporis spatium; quasi qui Tempus quid sit nescit, intelligere possit quid sit Temporis spatium.

DEFIN. VII.

Resistentiam sive Vim resistendi, Potentiam motui contrariam, sive quæ Motui resistit.

VItiosa est. Neque Potentia Actui, id est Motui contraria esse potest; neque verbum *Resistere* intrare debet in Definitionem Resistentiæ, ne sit idem per idem.

Resistentia est, ubi sunt duo Mobilia contigua, conatus utriusvis conatui alterius, omnino vel ex parte aliqua, contrarius. Atque hoc ille voluit; legerat enim Definitionem hanc in Libro meo *de Corpore*, Cap. 15. Art. 2. Verum ne videretur meis uti (quibus temerè antè contradixerat) dum dum studuit mutando sua facere, corrupit. Nescit enim, nisi quæ vulgaria sunt, Latinè dicere, ut videre est in Libri hujus sui initio, ubi definit *Mechanicam* per *Geometriam de Motu*.

DEFI-

DEFIN. VIII.

Per Distantiam sive Longitudinem Motûs, intelligo Longitudinis spatium illud quod Motu transigitur.

I Dest, per Longitudinem Motûs intelligit lineam, quæ longitudo quidem est, sed semper Corporis. Per Distantiam sæpissimè intelligitur longitudo quæ est (inter duo Corpora) brevissima, quæ unica est, sed longitudines variæ sunt.

DEFIN. IX.

Celeritas est Affectio Motûs ex comparatione Longitudinis & Temporis resultans: Utpote quæ, Quo tempore quanta longitudo transigitur, determinat.

NOtum per ignota. *Celeritas* enim vox ab omnibus intelligitur, sed *Affectio Motûs* à nemine. *Affectio* animalibus propriè tribuitur, ut Passio Corporibus. *Resultare Affectionem* nihil significat, & est loquutio à Demonstrandi ratione alieniſſima. Quod autem sequitur, *Quæ quo tempore quanta longitudo transigitur determinat*, rectum quidem est, sed desumptum ex Libro meo *De Corpore*, Cap. 8. Art. 15. ubi Velocitatem definieram esse *Motum, quatenus eo longitudo certa certo tempore transmittitur*. Quam Definitionem meam, mutato *Velocitatem* in *Celeritatem*, reddit amque breviorem (sed tantundem simul obscuriorem) nunc suam facit.

DEFIN. X.

Æqualis Celeritas est, quæ æqualem Longitudinem æquali Tempore transigit.

DEsumpta est ex Libro meo *De Corpore*, Lib. & Cap. iisdem. Artic. 17.

DEFI-

DEFIN. XI.

Major Celeritas est quæ majorem Longitudinem æquali tempore transigit, vel minore Tempore æqualem.

HÆc quoque ex eodem loco desumpta est.

DEFIN. XII.

Gravitas est Vis motrix deorsum, sive ad Centrum Terræ.

AD hanc Definitionem subjungit, *Quodnam sit in consideratione Physica Gravitatis principium non hic inquirimus.* Sed cur non inquisivit? *Quia* (inquit) *sufficit ut Gravitatis nomine eam intelligamus, quam sæpe deprehendimus vim deorsum movendi, tum ipsum corpus grave, tum quæ obstant minus efficacia impedimenta.* Itaque Scientia causarum Gravitatis sive motûs Gravium Professori *Saviliano* non videtur conducere ad doctrinam Ponderum. Sufficit illi, Gravia recipere +. −. —. Id est, *plus, minus, æquale*; quasi si alia esset causa gravitatis quam quæ est, eadem apparerent circa ponderationem omnia quæ nunc apparent.

Sed & Definitio ipsa falsa est. *Gravitas* enim Qualitas vel accidens est corporis deorsum moti; sed *Vis Motrix* est Qualitas vel Accidens corporis deorsum moventis. Quin autem movens & motum sint diversa Subjecta, præter Scholarem, nemo dubitabit. Utraque, tam *Gravitas* quam *Vis Motrix* conatus quidem est, id est Initium motûs; sed altera est in Movente, altera in Moto corpore; idemq; est conatus in motu quod punctum in linea.

DEFIN. XIII.

Per Pondus intelligo Gravitatis mensuram.

PRoposicio (quanquam ab eo non sit demonstrata) vera est; Definitio non est. Non enim est de essentia ponderis, ut sit Ponderis vel Gravi-

tatis mensura, magis quàm est de essentia Numeri, ut sit mensura æqualis vel majoris Numeri.

Ad Definitionem hanc, peritiam suam in *Grammatica* rursus intempestivè ostentans, subjungit plus quàm viginti Etymologias, ut *Pondus* à *pendeo*, *Toga* à *Tego*, & similia; est in illis, *Onus* à Græco Ὄγκος, quod ineptissimum est; Cum Ὄγκος *Molem*, *tumorem*, *magnitudinem* significet, sive gravem sive levem, & bulla aquæ Ὄγκος dicitur, sed nullo modo onus.

Neque Propositionem ipsam (licet vera sit) demonstrare quisquam potest, nisi *Pondere* & *Mensura* prius & rectè definitis, quarum ille neutram definivit. Definitur autem Pondus, *Lib. de Corpore*, Cap. 23. hoc modo: Pondus est Aggregatum omnium conatuum quibus singula puncta corporis quod radium Libræ premit in rectis sibi mutuo parallelis conantur.

Deinde nugatur de differentia inter *Pondus* & *Onus*; quasi *pondus* ad *Libram*, *onus* ad *Vectem* referendum esset; cùm manifestum sit, *Pondus* absolutè semper dici, & esse semper (in eodem corpore) idem; *Onus* contrà semper relativè dici ad ferentem, & majus vel minus pro ratione virium sustinentium.

Rursus in lingua *Græca* ἄχθος deducit ab ἄγω, cùm deberet ab ἄχος *Dolor*.

DEFIN. XIV, XV.

Directionem Mobilis, aut etiam Motûs, appello, rectam qua tendit Mobile. (Motúsque mensuram secundum hanc æstimatam, Motus Longitudinem appello.) Sin curvâ feratur Mobile, (cujus directio in singulis punctis immutetur;) ea est, pro singulis punctis, motûs Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.

Directionem Virium seu Moventis, appello, Rectam quâ tendit vis Motrix. Motusque mensuram secundum hanc æstimatam, appello Motûs Altitudinem.

MAnifestum est *Directionem Mobilis* esse *Actionem moventis*, per quam efficit ut mobile per lineam certam & unicam moveatur. Actio autem linea non est; neque ergo *Directio* (ut ille definit) est longitudo, sed causa efficiens motus. Hoc ergo erratum primum est.

Secundò, Ut illa recta fuerit (quanquam Directio linea esset) demonstrandum tamen erat. Quod in Definitione, vitium alterum est.

Tertiò, Quod *Directionem Mobilis* dicat rectam eam esse qua tendit Mobile, falsum est. Nam idem est ac si diceret, quod mobile dirigit seipsum,

ipſum, viamque ſuam ſibi eligit, neglectâ directione motoris ſui. Quod eſt peccatum tertium.

Quartò, Cùm Menſuram motûs ſumptam in Directione ejuſdem motûs, dicat eſſe motûs longitudinem, id eſt, viam qua tendit mobile eſſe menſuram motûs; quo ſenſu id dicit? Via *Mobilis* linea eſt; & linea lineæ majoris vel non minoris menſura eſt. Sed lineam eſſe menſuram longitudinis motus (cùm longitudo corporum non motuum Accidens ſit) loquutio abſurda eſt. Hoc igitur quod dicit de menſura directionis, peccatum quartum eſt.

Quintò, Quod dicit, quando mobile in curva fertur, Directionem eſſe curvæ illius Tangentem; Definitio non eſt, neque *Axioma*, ſed Propoſitio dubia eſt aſſumpta gratis. Quod peccatum eſt quintum.

Sextò, Quod eadem illa Propoſitio univerſaliter profertur, cùm non ſit verum de curvis omnibus, ſed de ſolis circularibus, peccatum ſextum eſt.

Poſtremò, Quod verum ſit in Circularibus, demonſtratum legerat in Libro meo *De Corpore*, Cap. 21. Art. 9. neque agnoſcit, peccatum in moribus eſt.

Neque melior eſt Definitio 15. nam ut *directio Mobilis* eſt à motu Moventis, ſic (cùm movens etiam ſit mobile) habebit etiam directionem Movens à Movente alio, & ea via, non qua ipſum à ſe, ſed qua à movente proprio dirigitur. Nihil enim ſeipſum aut movet aut dirigit.

Applicans hæc ad deſcenſum Gravium, aſſumit: Quod deorſum feruntur Gravia ſuâ ſponte, id eſt, quod moventur à ſeipſis ſine causâ efficiente, id quod Scholaſticum eſt & falſum.

DEFI-

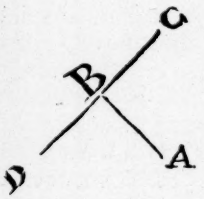
DEFIN. XVI, XVII, XVIII.

Declivitatem, ſeu gradum Declivitatis, appello, Reſpectum illum, qui ex motûs Altitudine & Longitudine comparatis (ob variam Directionis motûs ad directionem Moventis poſitionem,) emergit. Atque Acclivitatem ſimiliter; quæ à Declivitate non aliter differt quàm quòd altera Deſcenſum, Aſcenſum altera reſpiciat.

Æqualem Declivitatem, appello, quæ, æquali peractâ Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque Acclivitatem, ſimiliter.

Majorem Declivitatem, vel acclivitatem, dico, quæ, æquali peractâ Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minore Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem, eâ ratione majorem, quâ vel Altitudo illa major eſt, vel Longitudo, minor. Minorem; quæ contra.

DEclivitas (accuratè loquentibus) eſt Via qua deſcendit grave in recta non tranſeunte per centrum Terræ; Acclivitas, Via Aſcenſionis per eandem. Ut ſi centrum ſit A; & anguli ABC, ABD recti; erit in rectis CB, D B, Declivitas ad B; & in B C, B D, Acclivitas, Via contraria ad C & D. Et definitio brevis eſt & naturalis. Illa autem *Wallii*, *Reſpectus ex motus Altitudine & Longitudine emergens*, ſunt verba caſſa.



DEFIN. XIX, XX.

Obliquitatem verò, hujuſve menſuram, appello, Angulum quem facit cum Perpendiculo, (vel directione moventis) Directio Motûs, ſeu Linea quâ fertur Mobile.

Inclinationem verò ad Horizontem, appello, obliquitatis complementum, ſive quem facit angulum ad Horizontem, aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem.

OBliquitas & *Inclinatio*, voces ambæ ſunt relativæ. Recta ſi alii rectæ obliqua ſit, etiam hæc ad illam obliqua eſt. Nam recta ſolitaria obliqua dici non poteſt. Idem verum eſt de Inclinatis, quæ locum habent

habent in angulis tantum; ut quorum cura adſe invicem per motum circularem accedunt, ſive inclinantur.

Malè itaque definit *Obliquitatem* generaliter per Relationem ad perpendiculum vel directionem motus, quæ ſunt rectæ ſpeciales. Nec ſatis verborum illorum intellexit vim; neque propterea rectè explicare potuit.

Idem latus trianguli, ſi per ipſum deſcendat Grave, appellabitur Declivitas; & quia cum crure altero facit angulum obliquum, Obliquitas; & ſi faciat angulum quemcunque dicitur inclinata. Vides ergo quomodo Declivitas ab Obliquitate & Inclinatione differat.

Subjungit autem, *Declivitatem ab Obliquitate & Inclinatione diſtinguere neceſſe duxi.* Cur ergo non diſtinxit? Diſtinxit, inquies, cùm addidit, *Ea verò declivitatis ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter ſe rationes reſpiciat.* Quaſi obliquitas declivitáſque rectarum rationes non reſpicerent.

DEFIN. XXI, XXII.

Per Gravitatem, laxius acceptam, intellige, Vim quamvis continuam in quamcunque plagam motricem: per terræ Centrum, intellige, Terminum quò tendit vis illa Motrix: Per Perpendiculum, vel rectam ad Terræ Centrum, vel etiam rectam Horizonti perpendicularem, intellige Lineam Directionis Vis motricis. Per Deſcenſum & Aſcenſum, Appropinquationem, & Elongationem à termino Vis motricis: Per rectam Horizontalem, vel Horizontale planum; Rectam, ſeu Planum, lineæ directionis moventis ad angulos rectos. Per Deſcenſum, vel Aſcenſum obliquum, Lationem ſecundum lineam, quæ lineam Directionis moventis obliquè ſecat, ad moventis terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cæteraque ſimiliter accommodanda ſunt.

Machinas, appello, Inſtrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinſecus adhibita.

IN *Definitione* 21. dum Gravitatem diſtinguit in ſtrictè & laxius acceptam, utramque in unam eandemque confundit. Gravitatem enim laxiùs acceptam, Vim motricem eſſe dicit in quamcunque plagam. Deinde per centrum Terræ intelligere ſe dicit, Terminum quo tendit vis illa Motrix. Quaſi quod tendit ad Centrum Terræ non eſſet verè & propriè dicendum Grave.

In *Definitione* 22. quæ eſt ultima, Machinam eſſe dicit inſtrumentum Motibus facilitandis forinſecus adhibitum. Nonne id rectè dicendum eſt

conducere

conducere ad Motum quod motui facilitando adhibendum eſt? Machina ergo per illius Definitionem tertiam eſt Momentum.

Percurrimus hactenus Definitiones, in quibus ne una quidem quæ non aliunde deſumpta ſit, eſt legitima. Potuerunt igitur omitti omnes, ut quarum nulla inſeruit ad doctrinæ inſtitutæ Demonſtrationes. Cujus ineptitudinis alia cauſa eſſe non potuit, quàm quod materiam tractare auſus fuerit quæ nihil attinet ad ſuam *Algebram*, quam ſolam nec hanc perfectiſſimè didicit; ut paulò pòſt videbimus. Itaque in hac parte Libri ſui nihil agit, præterquam quòd fruſtra ſe motitat, veluti piſcis in arido. Itaque ex 22. Definitionibus, Prima eſt abſurda; tertia, octava falſæ; nona mea; duodecima & quindecima falſæ; viceſima prima, abſurda. Reliquæ quindecim ineptæ.

Sequuntur Propoſitiones 30. quarum novem primas appel'at, *Lemmata*.

PRO-

PROPOSITIO I.

Quæ ad æqualia eandem habent rationem, ſunt inter ſe æqualia. Et contra.

$$A = E.\quad 2A = 2E.\quad 3A = 3E.\quad rA = rE.$$

Puta ſi A, E ſint inter ſe æqualia, erunt & inter ſe æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E, & univerſaliter r A, r E, cujuſcunque rationis Index ſit r. Per 7. 9. 11. Prop. 5 El. Euclidis.

DEmonſtrationis hujus accuſo tum obſcuritatem, tum prolixitatem. Obſcuritatem, quia ſi *Euclides*, vel *Archimedes*, vel quicunque veterum & maximorum Geometrarum nunc reviviſceret, atque hæc legeret, propter tamen *Symbola* & vocem illam *Index* hic poſitam, nihil eorum intelligeret.

Prolixitatem, quia cum ad *Euclidem* Lectorem amandet, pluribus non erat opus, quàm ut Propoſitioni ipſi locum *Euclidis* ſubſcriberet.

Scripſit (inquies) non illis qui Geometras legerant omnibus, ſed illis tantum qui *Oughtredi Clavem* legerant & intellexerant, ſicut ipſe. Malignus ergo erat. Voluit fortaſſe admirationi eſſe illis, à quibus non intelligebatur. Ergo inepte fecit.

PROPOS. II.

Ubi ratio ex duabus pluribuſve componitur; datis Componentibus, datur Compoſita. Nempe, multiplicatis invicem Exponentibus componentium, ut habeatur exponens compoſitæ.

PRopoſitio quidem vera eſt, nempe, *Ubi ratio ex rationibus componitur, datis componentibus, datur compoſita.* Reliquum falſum eſt. Sed ille nil demonſtrat. Quod ut certius ſcias (cum dependeat à *Defin. 5. Elem. 6. Euclidis*) Definitionem illam perſpicuè tibi explicabo.

Defini-

Definitio ibi tradita hæc est, *Ratio ex rationibus componi dicitur, cùm rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquam effecerint rationem.*

Exponantur enim duæ rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*. Ratio *A* ad *B*, exponitur à duabus lineis vel numeris *A* & *B*. Ratio enim nisi à duabus lineis vel numeris Antecedente & Consequente exprimi, id est, exponi non potest; nec duæ rationes nisi à quatuor. Antecedens & Consequens prioris rationis apellantur hic ab *Euclide*, quantitates rationis prioris, nempe *A* & *B*. Quantitates autem rationis secundæ *C* & *D*.

Ex his quatuor si duæ Antecedentes *A* & *C* inter se multiplicentur, ut factus sit *AC*, sive rectangulum *AC*; & similiter Consequentes *B* & *D*, ut factus sit *BD*; pronuntiat *Euclides* rationem *AC* ad *BD* componi ex rationibus *A* ad *B*, & *C* ad *D*. Quod est verissimum.

Exempli causa, sit *A* æqualis 2, *B* æqualis 3, *C* æqualis 4, *D* æqualis 7. Quare multiplicatis inter se *A* & *C*, factus erit 8. Et *C*, *D* multiplicatis inter se factus erit 21. Ratio ergo 8 ad 21 componitur (juxta *Euclidem*) ex rationibus 2 ad 3, & 4 ad 7. Quod est verissimum. Quomodo? Fiat ut 2 ad 3, ita 8 ad aliam, erit illa 12. Ergo 8 ad 12 eadem ratio est, quæ 2 ad 3. Est autem ratio 12 ad 21, eadem quæ 4 ad 7. Componitur ergo ex rationibus 2 ad 3, & 4 ad 7, juxta mentem *Euclidis*. Rationis autem compositæ 8 ad 21, sive *AC* ad *BD*, quantitates, sive (quod idem est) exponentes sunt in numeris quidem 8 & 21, sed in quantitate continua sunt rectangula *AC* & *BD*. Manifesta hæc sunt, & propterea manifestum etiam est, neque *Wallisium*, neque (meliorem quàm ille est Algebristam) *Clavium* in Definitione hac El. 6. 5. *Euclidis*, quicquam perspexisse.

Sunto (ait *Wallisius*) datarum rationum *Indices*, seu *Exponentes*, *A*, *E*. Assumit hic datos esse rationum Componentium Indices. Sed in propositione datos esse non supponit. Nam Propositio nihil supponit datum præter ipsas Rationes componentes. Assumit ergo Indices seu Exponentes Rationis compositæ esse ipsas Componentes. Quod non probat; & est præterea falsum. Demonstratio igitur non procedit.

Secundò, Quæ sunt rationes quas vult componi non declarat. Ratio quidem *A* ad *E* unica est. Ubi est altera? Nusquam. Assumit ergo *A* esse Indicem rationis *A* ad *E*. Sumpta ergo ratione alia quacunque *A* ad *M*, erit per illum, Index rationis *A* ad *M* idem *A*; & per consequens *A* ad *E*, & *A* ad *M* eadem ratio.

Tertiò, Quod dicit rectangulum *AE* esse rationem compositam ex duabus rationibus, absurdum est. Rectangulum enim ratio non est. Demonstratio ergo falsa est.

Dicet fortasse, Quod verba ejus non rectè interpretor. Cum enim ratio ipsa sit quantitas, & ratio una, una quantitas, & plures rationes totidem quanti-

quantitates, Cur (inquies) non potuit pro una ratione ponere Exponentem, unam literam *A*, pro altera *E*? Respondebis potuisse. Sed Rationes inter se certè multiplicare non potuit. Quicquid enim multiplicatur, per numerum multiplicatur. Et si quid fit ex ductu quantitatum continuarum, efficientium alterum erit linea. Quod si duarum Rationum (exempli causa, 2 ad 3, & 4 ad 7,) quatuor illi numeri, sive quantitates, scribantur in forma duarum Fractionum, hoc modo $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, multiplicari inter se possunt, & facient $\frac{8}{21}$. Et ratio 8 ad 21, componitur ex rationibus 2 ad 3, & 4 ad 7. Sed neque $\frac{2}{3}$, neq; $\frac{4}{7}$ neq; $\frac{8}{21}$ est ratio, sed quantitas absoluta. Itaque id quod *Euclides* vocat rationum quantitates, sunt comparatarum non comparationum quantitates. Causa igitur quare Propositio vera est, non est Definitio illa quinta *Elem. Sexti*, prout ille eam intelligit, sed *Elementi Sexti*, *Propositio* 23. quam ille transcripsit *Ghebricè*. Ego verò eandem (ut vides) ex ipsa Definitione demonstravi. Cæterùm hactenus excusandus *Wallius* est, quòd *Clavius* Definitionem illam & Definitionem Rationis apud *Euclidem* non meliùs intellexit quàm ille.

PROPOS. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Datâ Compositâ, & Componentium unâ; datur altera. Nempe, Diviso Exponente compositæ, per datæ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter, si ex quotlibet componitur; Datâ compositâ, & vel unâ vel quotlibet componentium, vel ex his compositâ; datur composita ex reliquis.

VEra est, sed non demonstrata, quia deducitur à præcedente non demonstrata.

PROPOS. IV, V.

IV. *Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ priùs ratio. Et contra. Quæ cum aliâ ratione composita, illam non immutat; est Æqualitatis ratio.*

V. *Quantitates quælibet, in eâdem ratione, vel auctæ vel diminutæ; in eâdem quâ priùs ad invicem ratione constituuntur.*

AMbæ veræ sunt, sed neutra demonstrata. Imò juxta doctrinam ab ipso editam, neutra vera est. Utraque autem, ut ab illo profertur, obscura est.

Quarta vera est, propter eam solam causam, Quod ratio æqualis ad æquale non est quantitas.

Componatur enim cum ratione A ad A, ratio A ad dimidiam A, sive $\frac{1}{2}A$, ut in his quantitatibus, $A, A, \frac{1}{2}A$. Manifestum est Rationem compositam ex A prima ad A secundam, & ex A secunda ad $\frac{1}{2}A$ tertiam (nempe A primam ad $\frac{1}{2}A$) eandem esse cum ratione secundæ A ad $\frac{1}{2}A$ tertiam; id quod ipse vult cùm dicit, *Si Ratio quævis, cum æqualitatis ratione componatur, eadem manet quæ prius ratio*; quanquam verba ejus id non significent.

Ex quo manifestum est, Rationem æqualitatis (ut putavit ipse) non esse quantitatem. Nam una ratio æqualitatis nec major nec minor est alia ratione æqualitatis; id quod cùm ego demonstrassem (*Lib. de Corpore, Cap.* 13. *Art.* 3.) in Elencho suo negavit ille.

Itaque Propositiones hæ IV, & V. à suâ ipsius doctrinâ evertuntur. Sed rationem (inquies) æqualitatis quantitatem non esse, post didicit. A quo? Nam doctrina ejus erat eo tempore doctrina Geometrarum omnium. Potuit (dices) Demonstrationem meam & facilem melius considerando, veram esse tandem invenire & uti. Potuit quidem, sed quod Authorem quem culpaverat non absolverit inhonestum erat. Sed quomodo Propositionem suam probat? *Quæ* (inquit) *ex æqualis & dupli rationibus componitur, est dupli ratio*, &c. Quibus verbis Propositionem exemplis explicat, non probat.

Pro Demonstratione offert tantum hoc, *Sequitur ex Secunda.* Secundam autem (ut modo ostensum est) non demonstraverat. Deinde hæc ipsa ejus verba, *Quæ ex æqualitatis & dupli rationibus componitur*, Qualis oratio est? Quàm ad demonstrationem Geometricam inepta? Etiam, quam non Grammatica? Cum præmisisset *rationem æqualitatis*, cur non addidit *rationem* potius *Duplicitatis quàm Dupli?* Causam audi. In scriptis Geometrarum ferè omnium invenitur pro ratione 2 ad 1, sive dupli ad simplum, semper ferè *Ratio dupla*; quasi ratio 2 ad 1, esset duæ rationes. Id quod in Lib. *De Corpore* cùm reprehendissem, quia dicendum erat *ratio Dupli ad Simplum*, *Wallius* in Elencho contendit (sermone acerbissimo) rationem 2 ad 1, esse rationem duplam, & rationem 3 ad 1, esse triplam. Quod cùm postea errorem esse vidit, usus est his verbis, *Ratio dupli, ratio tripli*, &c. Quæ nihil significant, veritus ne si diceret *Ratio dupli ad simplum*, videretur aliquid à me didicisse quem contempsisse videri voluit.

Etiam ab eo quod ratio æqualitatis non est quantitas dependet quinta, quam ille probat à quarta, quam non demonstraverat.

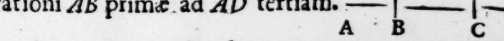
PRO-

PROPOS. VI.

Quæ ex reciprocis Rationibus componitur Ratio, eſt Ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

NEſcio quo Authore rationem inverſam vocat reciprocam. De rationibus inverſis vera eſt; ſed non ab illo demonſtrata. *Sequitur* (inquit) *ex ſecunda.* At ſecundam (ut ſupra oſtenſum eſt) non demonſtraverat. Deinde addit, *Quippe ſi ratio A ad E, cum ejuſdem reciproca E ad A, componatur: prodibit ratio A E ad E A; quæ eſt æqualitatis.* Sed hæc eſt Propoſitio ipſa, quæ erat demonſtranda. Itaque idem per idem probat. Falſum etiam eſt, rationem *A* ad E, compoſitam cum ratione *E* ad *A*, facere ipſam rationem *A E* ad *E A*, ſed tantum æqualem; facit enim rationem *A* ad *A*, ut manifeſtum eſt ex rationum ipſarum expoſitione, *A, E, A.* Ubi vides rationem compoſitam ex rationibus *A* ad E, & E ad *A* eſſe primariò rationem *A* ad *A*, non autem *A E* ad *E A*, niſi ſecundariò & per conſequens.

Unde ergo certus erat *Walliſius* de veritate ſuæ Propoſitionis? Demonſtratur à me, *Lib. de Corpore, Cap.* 13. *Art.* 13, & 15. Quem librum reprehendendi ſtudio diligentiſſimè legerat. *Articulo* 13. demonſtravi, Quod ſi fuerint tres lineæ quæcunque *AB, AC, AD*, rationes *A B* ad *AC*, & *A C* ad *A D*, æquales eſſe rationi *AB* primæ ad *AD* tertiam.



Deinde ex eo demonſtravi *Art.* 15. *Quod ſi ratio componatur cum ſua ipſius Inverſa, compoſitam eſſe rationem æqualitatis.* Quam ille conans demonſtrare *Ghebricè* non potuit; quia ea de re neque *Gheber*, neque *Diophantus*, nec quiſquam ante me, (quanquam difficultas non magna erat) quicquam ſcripſit. Si ita non ſit, contrarium oſtendat *Wallius*, & ab illo, non à me deſumptum confitebor, nec intellectum.

PROPOS. VII.

Effectus ſunt, cauſis ſuis adæquatis, proportionales.

COnverſa ferè eſt Definitionis, qua definita eſt à me. *Eadem ratio Geometrica,* (*Lib. de Corpore, Cap.* 13. *Artic.* 6.) quam in Elencho ſuo impugnaverat. Debet ergo mihi hanc.

Demon-

Demonſtratio illius etiam imperfecta eſt, cum non ſit extenſa ad incommenſurabilia. Nam quod inferiùs dicit, *Quod de commenſurabilibus oſtenditur cum nulla cauſa concipi poſſit, cur non de incommenſurabilibus ſimiliter verum ſit: Et poteſt etiam ſi opus ſit, demonſtrari demonſtratione Apogegica*, incertum eſt. Ubi dicit *Nullam cauſam concipi poſſe*, &c. Nimium ſibi tribuit. Puto multa valdè à multis concipi poſſe, quæ concipere ille non potuit. Sed cur dicit, opus non eſſe ut demonſtretur etiam de *incommenſurabilibus*, cum Propoſitio univerſalis ſit? Nimirum, quia ſi hoc faciſſet, neceſſarium ei fuiſſet illa Definitione mea uti, quam in *Elencho* ſuo antè damnaverat.

Præterea, verba illa, *Si cauſa ut* C, *efficit ut* E, *etiam altera* C, *alteram* E *efficit*, *& tertia tertiam*, non eſt (ut ille putat) Propoſitionis Demonſtratio.

Supponamus enim currui equos junctos duos, qui illum trahant unâ horâ unam *Leucam* tota vi.

Supponamus etiam eidem currui junctos eſſe equos ſex æquè fortes, quæro quot leucas una hora conficient equi illi ſex. Nonne juxta hanc Propoſitionem conficere debent leucas ſex? At impoſſibile eſt. Tantum enim ſpatium, ne onere quidem liberi, tranſire poſſunt. Demonſtratio ergo ejus, nempe, Si cauſa ut *C*, &c. nihil valet.

PROPOS. VIII

Contrariorum, quatenus contraria ſunt, Aggregatum, æquipollet Exceſſui Præpollentis: Congruentium verò, eorundem Summæ.

FAlſa eſt. Nam $A - A = 0$; id eſt, Aggregatum ex contrariis, quatenus ſunt contraria (ut ipſe interpretatur) æquale eſt nihilo. Idem æquale eſſe dicit Exceſſui præpollentis, hoc eſt differentiæ inter $+A$ & $-A$. Quod eſt falſum. Nam cum Aggregatum ſit nihil, etiam differentia inter $+A$ & $-A$, debet eſſe nihil. Quod eſt falſum. Nam differentia inter $+A$ & $-A$ eſt $2A$. Quod tum ratione naturali, tum à Subſtractionis regula manifeſtum eſt. $\frac{+A}{-A} = 2A$.

Nam per illam Regulam tum juxta *Oughtredum*, tum juxta *Clavii* & *Harrioti Algebram*; ut ſubſtracto $-A$ ex $+A$. habeatur reſiduum, ſumendum eſt *Aggregatum* quantitatum (quod hoc loco eſt $2A$) & præfigendum Signum $+$. Differentia ergo erit $+2A$. Idem oſtendit ratio naturalis. Eſt enim A major quàm nihil quantitate A, & rurſus nihil majus quàm $-A$,

eadem

eadem quantitate *A*. Quare + *A* ſuperat — *A*, quantitate 2 *A*. Facit ergo 2 *A* æquale Nihilo. Propoſitio ergo falſa eſt. Putarem antehac fuiſſe *Walliſium* Algebriſtam perfectiſſimum; atqui video jam quod in quantitatibus affectis ne Subſtractionem quidem noverit.

PROP. IX.

Æquipollens ſi vel augeatur, vel contrarium minuatur fit Præpollens: Si minuatur, vel contrarium augeatur; fit minus-pollens.

PRopoſitio hæc Nona, & Lemma ultimum, eadem eſt cum Hypotheſi mea prima, ad *Cap.* 23. Lib. *De Corp.* eſt autem hæc, *Si pondus ad alterutrum æquilibratorum acceſſerit, ad alterum verò non acceſſerit, tollitur æquilibrium.* Quam ille dubium eſſe ratus, addito [totum majus eſt ſui parte] demonſtrare pulchrum eſſe exiſtimavit.

PROP. X.

Ubi conjuncta ſunt Momentum & Impedimentum: Si Momentum præpollet, pro Momento ſimul habenda ſunt; pro Impedimento verò, ſi præpollet Impedimentum; Et utrobique tanto, quantus eſt præpollentis Exceſſus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura ſint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta: Tanta ſimul habenda ſunt, quanta eſt eorundem ſumma.

Cum enim Contraria ſint Momentum & Impedimentum; hoc eſt, Cauſa ut ſit, &, Cauſa ne ſit: Conſtat propoſitum, per 8. *hujus.*

FAlſa eſt. Quid enim? Si ſaxum terræ imitatur, nonne Momentum ejus idem eſt quod pondus? Terra autem ponderi nihil aufert, neque ergo Momento; neque addit, neque quicquam in ſaxo efficit, præterquam quod motum ulteriorem tollit. Quomodo ergo accipienda ſunt ambo pro Momento? Nam ſi terra dicatur Momentum habere ſurſum, quo Momentum deorſum minuat, dicetur quoque habere in ſe vim movendi ſurſum. Quod eſt abſurdum. Quid ergo Momento & Impedimento conjunctim tribuendum eſt majus quàm Momento ſoli attribuitur? Quod addit, *Et tanto quantus eſt præpollentis exceſſus*, falſiſſimum eſt. Nam ſequeretur inde (ut ad

Prop. 8. oſtenſum eſt) quod terra conatur ſurſum bis tanto quantus eſt conatus ſaxi ad centrum terræ.

Demonſtrationem ex eo ducit, Quod contraria inter ſe ſunt Momentum & Impedimentum; cauſa ut ſit, cauſa ut non ſit; quod eſt falſum. Contrarii enim ſunt duo motus ab ejuſdem rectæ diverſis terminis concurrentes: Nam Motus & Quies non opponuntur contrariè, ſed privativè. Quod denique adjicit poſtremo loco, *conſtat propoſitum ex Prop.* 8. etiam falſum eſt; nam octavam illam manifeſtiſſimè probavi eſſe falſam.

Cauſa falſitatis erat, Quod idem eſſe cenſuit Impedimentum & Reſiſtentiam; quanquam ipſe definierat (malè) Impedimentum eſſe id quod impedit. Et Reſiſtentiam (melius, ex libro meo de *Corpore*, Cap. 15. Art. 2. numero 3.) potentiam motui contrariam. Id quoque minus accuratè quam decuit Geometram. Potentia enim Actui contraria eſſe non poteſt.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet: Motum efficit. Adeoque; Si nullus fuerit, Inchoatur: Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum; Impedit. Adeoque Motum, ſi quis jam ſit, vel Tollit, vel ſaltem Minuit.

Et quidem in eâ ratione plus minuſve Efficit aut Impedit, quâ major eſt vel minor Exceſſus præpollentis.

Si æquipollent: Neque ponitur motus, neque tollitur. Adeoque quæ prius erat vel Quies vel Motus perſeverat.

FAlſa eſt. Nam ſaxum terræ inſidens Momentum habet, quantum ſcilicet eſt ipſius pondus; Terra autem, quia Vim motricem ſurſum nullam habet, Momentum nullum habet. Ergo Momentum contrarium nullum habet. Momentum igitur ſaxi præpollet impedimento à terra in ratione ponderis Saxi ad nihil. Ergo ſaxum terræ inſidens deſcendet. Quod eſt abſurdum.

Secunda pars, *Si æquipollent, neque ponitur Motus, neque tollitur*, vana eſt. Nam inter Momentum *Gravis* deorſum conantis, quod eſt aliquod, & Momentum *Gravis* conantis ſurſum, quod eſt nullum, nulla poteſt eſſe æquipollentia.

Quod infert ultimo loco, *Adeoque quæ prius erat vel Quies vel Motus perſeverat*, ex illius præmiſſis non ſequitur; vera tamen eſt, & à me demonſtrata (Lib. *de Corpore*, Cap. 9. Art. 7.) quam ille in Elencho ſuo conatus eſt refellere.

In

In *Scholio* ad *Propoſitionem* hanc ſuam affirmat Propoſitionis ſuæ partem hanc ultimam à *Galilæo*, *Carteſio*, & *Gaſſendo* ſumptum eſſe ut Poſtulatum; nec meminiſſe ſe vidiſſe à quoquam demonſtratum; quorum utrumque ſciebat eſſe falſum. Nam Demonſtrationem meam legerat, ut confutaret; ab illis autem poſtulatum fuiſſe nunquam legerat. Sed meis uti quibus contradixerat turpe ſibi eſſe ſcivit.

PROP. XII.

Vis vi contraria, ſi æquipollet, ſuſtinebit: Si minus pollet; ne hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adſit impedimentum,) movebit. Et contrà: Si movet, præpollet: Si non movet; tum vel minus pollet, vel ſaltem æquipollet, vel aliud quid impedit.

HAnc ſciunt etiam pueri decennes, quam tamen ille non demonſtravit. Nam deducit eam ab *Octava* & *Septima* præcedentibus, quarum illam abſolutè falſam, hanc non eſſe univerſaliter veram ſupra oſtenſum eſt. Neque inter hanc & *Octavam* affinitas ulla eſt; cùm ibi de Momento & Impedimento agitur, hic de Vi, Vi contraria. Cauſa erroris eadem eſt quæ antè, nempe *Momentum* & *Impedimentum*, ſive cauſam ut ſit, & cauſam ne ſit, contraria eſſe judicaverat.

PROPOS. XIII.

Quæ ex Mobilium pondere reſultant motûs Impedimenta, (cæteris paribus) ſunt Ponderibus proportionalia.

Quodque de Pondere dicitur, de quavis aliâ contraria vi, ſimiliter intelligendum, quæ ponderis inſtar erat. Et ſimiliter in ſequentibus.

QUis hanc intelligit? Quid eſt *Reſultare?* Reſilire an ſæpe reſilire? Cùm ergo quid ſit non definivit, conjiciendum reliquit mihi. Ego vero nec illum voluiſſe puto, Impedimentum eſſe ponderis ipſius effectum, id eſt, Pondus ſibimet ipſi facere Impedimentum. Quod eſt abſurdum.

Quis unquam Geometra concluſionem intulit, cujus termini (ſive *Subjectum* & *Prædicatum* ut loquuntur *Logici*) non fuerint antè definiti. Præterea quoniam toto hoc *Capite* loquitur de *Motu* univerſaliter, & Propoſitionem intelligendam eſſe dicit de quibuſvis aliis viribus contrariis; ſupponamus

ponamus pondus in terram ab alto descendere, (cadet autem motu continuè accelerato) nisi terra impediat usque ad centrum. Quæro jam an ex hoc, Quod *Si pondus* P, *impedit ut* I; *tunc* 2 P, *impedient ut* 2 I, inveniri possit proportio Ponderis cujuscunque (cum sit pondus aliquid) ad Impedimentum (quod Motus non est.) Omnes ergo hactenus *Propositiones* ejus vel falsæ, vel alienæ, vel ab illo indemonstratæ sunt.

PROPOS. XIV, XV, XVI, XVII.

Quæ ex longitudine transigenda, resultant motus Impedimenta sunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii densitate, tenacitate, aut simili quovis impedimento, pariter dicendum erit. Et similiter in sequentibus.

FAlsa est; Nam ut Longitudo impediat Motum, incogitabile est. Motum enim nihil impedit, præter motum vel conatum contrarium. Annè minùs velociter ibit cursor ad primum ab urbe lapidem, eò quòd longiùs ab urbe distat lapis secundus quàm primus? Quid sibi hic vult non intellexissem, nisi ea legissem quæ scribit ad sequentem, nempe *Duplum pondus per duplam longitudinem ferendum, esse impedimentum quadruplum.* Unde intelligo quod loquitur de ferendis oneribus. Hoc ergo est quod dicit, *Si bajulus ferre potest pondus centum librarum per centum mille passuum, tempore quocunque* A, *tunc potest ferre centies centum librarum eodem tempore per unum tantummodo mille passuum.* O Geometram de Motu admirandum! Bajulus enim, vel etiam asinus, impedimentum quo minus longe onus ferre potuit debilitato corpori attribuisset, non longitudini viæ. Vel in navibus onerariis causam nauta dixisset tarditatis, resistentiam aquæ contra navem, majorem, si magis oneretur.

Quod ad demonstrationem ejus attinet (quæ suis ferè omnibus communis est) falsa est, neque quicquam valet, præterquam in numeris; ad Actionem & Passionem, quæ solæ spectantur in doctrinâ Motûs, accommodari non potest, nam si arcus sagittam emittat quingentas ulnas, ideonè arcus duplo fortior eandem emittet mille ulnas? Falsa ergo est, & 15, 16, & 17. quæ ab ea pendent.

PRO-

PROPOS. XVIII, XIX, XX.

Virium momenta, cæteris paribus, ſunt Virium gradibus proportionalia.

HÆc quoque, quatenus enuntiatur hoc Capite de *Motu* in genere falſa eſt.

Supponamus enim palum in terram defigendum, & à pondere cadente ab altitudine decem pedum, in terram adigi ad profunditatem pedis unius. Ergo per hanc Propoſitionem, palus idem vel par pondere duplo cadente ab eadem altitudine adigetur in eandem terram vel parem ad profunditatem pedum duorum. Falſum tamen eſt. Nam pro ratione celeritatis ponderis quod palum ferit, augebitur impedimentum à reſiſtente terra. Sin dicat, objectionem hanc, ex eo tolli, quod cætera ſuppoſuit paria, contradicet ſuæ ipſius, hujus Capitis Propoſitioni 13. qua affirmat, *Quæ ex Mobilium pondere reſultant Motûs impedimenta ſuis ponderibus ſunt proportionalia.* Eadem Propoſitio ad libram applicata vera eſt, ſed non ab eo demonſtrata. Sic enim arguit, *Si Vis ut* V, *movet ut* M; 2 V, *movebunt ut* 2 M. Non enim ſequitur. Nam ſi Vis Vi æquiponderat, neutra movet. Sed ille Momentum & Movere pro eodem habuit, nempe Potentiam & Actum. Quare etiam *Propoſ.* 19, & 20. falſæ ſunt, ſaltem non demonſtratæ, in motu libero.

PROPOS. XXI.

Si Vires & Tempora, ſint vel utraque æqualia, vel ſint Reciprocè proportionalia; quæ hinc reſultant Momenta ſunt æqualia. Et contrà: Si Momenta illa ſunt æqualia; Vires & Tempora, ſunt, vel utraque æqualia, vel ſaltem reciprocè proportionalia.

PRopoſitio hæc, quoties agitur de Motu uniformi vel uniformiter accelerato, ubi habenda eſt conſideratio Temporum, vera quidem eſt, ex eo quod ejuſdem in idem, idem eſt effectus, id eſt idem Momentum, ut ſciunt pueri. Sed in ponderationibus & in percuſſionibus, ubi effectus ſit in inſtante ut temporis conſiderationi non ſit locus, abſurda eſt.

PROPOS. XXII.

In quibuſvis motibus invicem comparatis, Momenta ſunt Impedimentis proportionalia.

HOc eſt, Momenta Ponderum, Momentis contraponderantium ſunt proportionalia, & verum eſt, & clarum. De Impedimentis obſcurum eſt. Impedimenta enim ſuâ naturâ Momentum (in partem contrariam) nullum habent.

PROP. XXIII.

In Comparatis Motibus; ſi lationum Tempora ſint æqualia; Celeritatum gradus ſunt tranſactis longitudinibus proportionales.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines ſint æquales; Celeritatum gradus ſunt Temporibus reciprocè proportionales.

PROP. XXV.

Comparatorum Motuum celeritates, ſunt in ratione ex directâ Longitudinum & reciprocâ Temporum rationibus compoſitâ.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines, ſint Temporibus proportionales: Celeritates ſunt æquales. Et contra.

VEræ quidem ſunt, non autem ab illo demonſtratæ; ſed demonſtrari poſſe innuit ex definitione *Celeritatis*. Cur ergo illas non ſumpſerat ut *Axiomata*, citatis Authoribus qui illas demonſtraverant?

PRO-

PROPOS. XXVII.

In comparatis Motibus, Virium gradus (cæteris paribus) ſunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

RIdicula eſt. Sint enim duo homines *A*, & *B*, habeatque *A* vim ut 2, *B* vim ut 1. Et Celeritas hominis *A*, ad Celeritatem hominis *B*, ut 2 ad 1. Ergo ratio virium *A* ad vires *B*, compoſita erit ex ratione Ponderis unius hominis ad Pondus alterius hominis, & ratione Celeritatis ad Celeritatem. Ridiculum.

Manifeſtum enim eſt in doctrina de Ponderibus, Pondus & Vires eandem eſſe rem; & propterea in comparatis motibus qui fiunt à Pondere & Virium gradu, vires eſſe ut ipſa pondera; nec, ut ille dicit, in ratione compoſita ex Pondere ad Pondus & Celeritate ad Celeritatem.

PROPOS. XXVIII.

Datum Pondus data Vi movere.

PRoblema notum eſt. Sed antequam ad Demonſtrationem accedam, pauca tibi de rei natura explicanda ſunt.

Deinde de eo quod præſtitit *Walliſius* judicabis. Primò ſciendum eſt, Quod pondus majus à minore non movetur, niſi vis motrix (id eſt potentia ad celeritatem) minoris, vi motrice majoris major ſit. Major autem eſſe non poteſt ubi pares ſunt circumſtantiæ. Aut ergo vis motrix minoris augenda, per Machinam aliquam, aut vis majoris minuenda eſt. Machinarum ad hanc rem una eſt Libra; à cujus centro ſi brachia ſint utrinque æqualia, termini brachiorum deſcribent (ſi moveantur) eodem tempore arcus æquales, ſin inæqualia, inæquales; ideoque brachium minus tardiùs majus celeriùs movebitur in ratione ipſorum brachiorum.

Secundò, Quod pondus ut 100. pendens à brachio uno ad diſtantiam à centro Libræ quamcunque, & pondus ut 1. pendens à brachio altero ad diſtantiam ut 1, Vis hæc 1, eſt centeſima pars virium alterius. Sin pondus idem 1, removeatur ad diſtantiam à centro centuplam, habebit vim centuplam, propter centuplicatam celeritatem, id eſt, vim æqualem vi ponderis majoris, ideoque majoris vim ſuſtinebit; nimirum unuſquiſque virium

gradus

gradus ſuſtinebit ponderis majoris partem ſuam. Hoc eſt, Pondus minus multiplicato tempore ſuſtinebit majus quantumcunque, & remotum adhuc à centro Libræ quantulocunque movebit ſurſum. Quæ Problematis conſtructio eſt per Libram.

Tertiò, Idem efficietur ſi Libra ſuſtineatur à fulcro quod ſit Horizonti perpendiculare. Nam Libra ſemper eſt, etſi vulgò vocetur Vectis, & fulcimentum, Hypomochlium appellatur.

Cauſa hujus rei Phyſica eſt, quod potentia ponderis eadem eſt cum celeritate qua brachium Libræ unde pendet movet in circulo, cujus centrum eſt centrum Libræ. Sed nec Libra nec Vectis magni momenti eſt Machina, ad movendum pondera ingentia, qualia erant quæ movit *Archimedes*.

Ratio movendi Vi minima pondera maxima, ab eo Principio derivatur, quod vis utcunqe exigua effectum habet aliquem.

Ab hoc Principio manifeſtè ſequitur, Quod qui pondus vel trahere, vel trudere, vel ſurſum tollere aggreditur, conatu primo quamquam levi, aliquantum proficit, & conatu perſeverante, id quod aggreſſus eſt in tempore perficiet, ſi quod conatu profecerat poſſet contra conatum ponderis reſiſtentis retinere; alioqui enim pondus relaberetur.

Ars ergo movendi datum pondus datâ Vi, alia non eſt quam ars inveniendi machinam, cujus ope quod primo conatu acquiſitum eſt, uſque ad conatum ſecundum, & ſimiliter à ſecundo ad tertium, & ſic deinceps conſervetur. Conatibus enim quamlibet exiguis, ſi multiplicentur, omnis tandem Vis data ſuperabitur.

Machina autem ad eam rem prima & commodiſſima eſt ea quæ vocatur *Cochlea*, id eſt Cylindrus firmiſſimus, ſecundum cujus ſuperficiem deſcripta linea Spiralis multarum circumvolutionum inciſa ſit. Quo facto virium moventis, licet minimi, effectus procedens ſecundum obliquitatem ſpiralem, à pondere levando, quantumvis magno, nunquam auferetur; propterea quod ponderis elati vis ſemper tendit ſecundum Cylindri axem, id eſt, ad ſpiralem ferè perpendiculariter.

Secunda, quæ conſtat ex rotis dentatis, dentibus alterius, per dentium alterius interſtitia circulari motu procedentibus, idem efficit.

Tertia eſt, Polyſpaſtum ex pluribus trochleis. Sunt & aliæ, ſed omnes præter Cochleam ad Vectem ſive Libram reduci poſſunt; quarum figuras & demonſtrationes apud Authores videas; ne te ubi opus non eſt, & præter inſtitutum meum detineam. Conſidera nunc illius demonſtrationem, & ſequentes duas quæ ab hac dependent, quibus clauditur Caput primum de Motu in genere.

Sit expoſita (inquit) *Vis* V, *quæ moveri potis ſit Pondus* P, *Celeritate* C. Quæro hic, ſi Vis & Pondus, id eſt Pondus & Pondus data, Libræ hinc & inde appenſa fuerint, quænam ſit celeritas illa data C, cum pondera omnia ejuſdem

ejuſdem materiæ ab æquali altitudine tendant ad centrum terræ celeritate eadem.

Quæro etiam, quoties pondus ut 2, pendens in diſtantia à centro Libræ ut 1, & pondus ut 1, in diſtantia à centro Libræ (ex altera parte) ut 2; quam habeat utrumvis eorum celeritatem, cum in æquilibrio exiſtentia quieſcant ambo.

Rurſus, quia in *Scholio* hujus Propoſitionis, magnitudinem ponderis compenſandum eſſe dicat tarditate Motus, ſeu Temporis longitudine, quæro ubi ille in antecedentibus, Celeritatis aut temporis quod ſit in pondere mentionem fecit. Sciunt quidem omnes eſſe in æquilibratis ponderum, & longitudinum à centro Libræ, rationem reciprocam; Sed hoc in præcedentibus demonſtratum non eſt, nec cauſa reddita ulla quare, & in quâ ratione, tardiùs moveretur quod longiùs à centro appenſum eſt, quam quod propiùs. Nihil ergo demonſtravit, idem vitium eſt in *Prop.* 29, & 30.

Manifeſtum etiam eſt nihil illum omnino (præter vulgo cognita) de natura Motûs intellexiſſe, ſed quæ legerat Symbolis tranſcripſiſſe, & non modo non demonſtraſſe, ſed ignorantia regulæ Subſtractionis in Arithmetica ſpecioſa corrupiſſe, per falſam Capitis hujus *Propoſitionem octavam.*

Video etiam illum ignorare Demonſtrationum leges, ut qui nec definire ſciat, & quæ definierat, inter demonſtrandum mutat.

Præterea Propoſitiones habet inutiles prorſus & abſurdas, quales ſunt, *Gravia gravitant in ratione ponderum. Grave quatenus non impeditur, deſcendit. Grave tantundem deſcendit quanto fit terræ centro propiùs, Graviums deſcenſus pollet*, &c. Vitium denique Demonſtrationibus ejus omnibus commune eſt Obſcuritas, non dico propter Symbola, ſed propter ſermonem ipſum.

Item propter ubique inculcatum *Cæteris paribus*, doctrinam ſuam redegit totam ad hanc unam Propoſitionem, *Ut eſt 1 ad 1, ita eſt 2 ad 2, & 3 ad 3, & m 3 ad m 3, &c.*

Item interpoſito ubique (mutatis mutandis) tranſfert omnia à pondere ad vim in genere. Prudenter hoc. Nihil enim tam falſum eſt, quod mutatis mutandis non fiat verum. In Propoſitione totius libri ultima, videri vult intelligere differentiam inter *Libram* & *Stateram*, quæ nulla eſt; niſi quod *Statera* ſit in examinatione ponderum abuſus quidam *Libræ* compendii cauſa tolerabilis in ponderatione carnium, & aliarum rerum non magni pretii; in qua ponderatione particula brachii ultra pondus commune excurrens, emptoribus aliquantulum addit, quod neſciebat ille.

Octava illa Propoſitio Capitis primi, quam falſam eſſe oſtenſum eſt ſuo loco, infecit 10. & 17. Capitis ejuſdem. Hæ tres infecerunt 6. 25. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. *Capitis Secundi.* Hæ rurſus infecerunt 4. 5. 10. 12. 13. 16. 18. 20. 25. *Capitis Tertii.*

Quod autem Propoſitiones ipſæ *Capitis tertii* ferè omnes (niſi quatenus non rectè enuntiatæ ſunt) cognitæ veritatis ſint, non illius ſed aliorum debetur Demonſtrationibus. Itaque quæ hactenus de Motu edidit, nullius pretii eſſe cenſeo; neque animadverſione digna, niſi, quia videbuntur fortaſſe exteris pars aliqua eſſe Philoſophiæ *Oxonienſis*, operæ pretium exiſtimavi cavere ne haberentur pro Philoſophia *Anglicana*: Partes doctrinæ *De Motu* adhuc reſtant duæ, quæ dicuntur ſub prælo eſſe: Illas antequam in lucem prodeant, niſi deſipiat iterum ponderabit. Neſcio tamen quantumvis ea reviſat, an emendare ſciat, homo nominum quibus utitur ipſe non intelligens, ut qui ſcripſit in Elencho ſuo Geometriæ *Hobbianæ* rationem 2 ad 1, eſſe duplam; 3 ad 1, triplam; 4 ad 1, quadruplam. Quaſi una ſola ratio poſſet eſſe dupla vel tripla, &c. vel ratio 4 ad 3, poſſet eſſe ut quadrupla ad triplam quantitatem, & multa alia non minus his abſurda & puerilia. Nec mirum eſt. Nam circa tempus quo ille *Euclidis* Elementa ſex priora adoleſcens percurriſſet, invaſerat *Geometriam Arithmeticæ* pars illa quam vocant *Speciosam* nullum non *Problema* promittens ſolvere. Cujus facilitate juventus capta, feſtinánſque ad gloriam, vel ad Scientiarum Mathematicarum cathedras (facilis enim adeo eſt ut quilibet puer Mercatoris Theoriam ejus perdiſcere uno die poſſit) relicta in demonſtrando methodo *Geometrarum* (quæ aliquando longa eſt, & vehementi animi intenſione indigens) contenti titulis, Veterum Demonſtrationes ipſas non legerunt. Ad quas autem propoſitiones numeros ſuos applicabiles judicabant, eas temerè & plerumque falsò per numeros demonſtrabant, nullam omnino rei quam tractabant habentes in animo ideam. Nolo igitur mihi Authoris hujus aut Geometræ Alghebrici cujuſcunque opus in poſterum tranſmittas Geometricum. Vale.

POSTSCRIPTUM.

SCripta, nec dum miſſa cenſura primæ partis, accepi à te partem ſecundam, ita obſcuram ut nullo modo examinari poſſet. Quantum tamen ſatis ſit ut ſcias neque in hâc parte quicquam eſſe (præter ea quæ ſciunt pueri) aut Geometræ aut Logici, aut hominis ſani, tantum tibi adnotabo. Caput hujus partis primum totiuſque operis quartum, incipit à Definitione quantitatis continuæ.

Continuum (inquit) *quodvis (ſecundum Cavallerii Geometriam Indiviſibilium) intelligitur ex indiviſibilibus numero infinitis conſtare.* Quod deinde explicans, *Hoc eſt* (ait) *ex particulis homogeneis infinitè exiguis, numero infinitis, ut linea ex infinitis punctis*, hoc eſt, *lineolis infinitè exiguis, longitudine æqualibus*, &c. Miraberis fortaſſe tu juxta quam *Logicam* vox *Cavallerius* intrare poteſt in definitionem quantitatis continuæ. Sed ego hoc prætereo.

Defini io

Definitio falsa est, & ex ea sequitur, primò, quantitatem continuam omnino nullam esse. Continuum enim omne divisibile est (ut fatentur Geometræ omnes, nec *Wallisius* negat) in semper divisibilia; & propterea pars infinitissima continui nulla est. Quod autem ex nihilis componitur etsi numero infinitis nihil est, & per consequens (juxta Definitionem hanc) continuum nullum est.

Secundò, Si continuum sit aggregatum (ut ille dicit) ex indivisilibus, ubi est quantitas discreta? Nam numerus nihilorum numerus non est; quia numerus numero additus, vel in numerum multiplicatus fit major. Sed nihil, neque additione nihilorum neque multiplicatione ulla augeri potest, nec divisione minui.

Tertiò, Ex hac Definitione, assumpto quod supponit ad *Prop. 6. Cap. 5. Circuli sectorem ex infinitis numero sectoribus componi (sive quod propter infinitatem, eodem recidit, ex totidem triangulis inter se æqualibus.)* Sequitur eandem esse rem, si satis exigua sit, Sectorem, Lineam & Triangulum.

Propositionis primæ, secundæ, & tertiæ causam nullam ostendit, nec potest; dependet enim à causâ efficiente physicâ, quam ille in parte prima consideraturum se esse ex professo negat, experientia illa quam habemus (prope Terræ superficiem) contentus. Itaque utrum grave, cœlo tranquillo, à magnâ aliquâ altitudine descendat perpendiculariter necne incertum linquit. Præterea cum Terra diurno & annuo motu (quod non negat) perpetuò moveatur, & gravia ad Terram fortuitò congregari verisimile non sit, quæcunque de gravitate dicturus est indemonstrata erunt.

Sed tribuatur experientiæ ita esse in superficie terræ, non demonstrandum, sed ut Axioma assumendum esset.

Quarta, Demonstrata est ab *Archimede*, & ab aliis post eum multis quam ille aliter demonstrare conatus non demonstrat; neque sequitur, ut ille putat ex 12, & 13. *Cap.* 3.

Quinta, Axioma meum est tractanti de centro æquilibrii, quam ille demonstrat per *Prop.* 8. *Cap* 3. quam octavam ostendi supra, suo loco esse falsam & contra demonstrata à *Clavio*, *Herrietto*, & suo ipsius Magistro *Oughtredo*. Præterea Propositio ipsa (ut facile observare potes) seipsam destruit. Nam Quantorum series infinita ultimum non habet. Ego ex Arithmeticarum & Geometricarum rationum differentiis (in quantitate finita) perpetuò decrescentibus magnitudines Figurarum investigaveram, ille tantundem valere putavit augmentum quantitatis infinitum; & idem se facere posse sperabat per suas quantitates infinitè exiguas frustra.

Prop. 6. Cap. 5. Hæc est. *Cujuscunque figuræ ex parallelis rectis planisve, secundum seriem infinitam ab 0, inchoatam constantis, Magnitudo est ad magnitudinem Parallelogrammi, vel solidi Prismatici super æquali basi æquè alti, ut unum ad Indicem seriei unitate auctum; & centrum gravitatis in ea est distantia*

distantia à vertice, quæ Axem ita dividit, ut pars ad basem sit ad partem quæ est ad verticem ut unum ad Indicem seriei unitate auctum.

Demonstraveram *Cap.* 23. Libri mei *De Corpore*, diametrum æquilibrii figurarum deficientium, ita dividere axem ut pars ad verticem sit ad partem reliquam, ut parallelogrammum ad figuræ complementum. Omnia denique quæ ille hâc propositione ejus quintâ demonstrasse se jactitat, conjeceram in tabulas capitis Libri mei decimæ septimæ. Si non credas, habes librum ipsum, illum adi. Vides ergo quâ arte ille hæc mea mutatis verbis ad se transferre conatus est, homo imperitus & vanus.

Demonstrare aggreditur Parabolæ complementum ad Parallelogrammum suum esse *ut unum ad Indicem seriei Secundanorum uno auctum*, id est ut 1 ad 3; quia Parabolæ complementum (ut ille putat) constat ex infinitis numero subsecundanis. Detur ita esse, id est à basi crescente perpetuò ut numeri quadratici, cujus index est 2, (quod tamen verum non est). Non igitur dissentimus; nam ego figuram deficientem à parallelogrammo suo ad complementum esse demonstravi, ut Ratio qua perpetuò diminuitur axis, ad Rationem qua perpetuò diminuitur basis, id est in Triangulo ut 1 ad 1; in parabola autem ubi ratio unius duplicata est alterius, ut 2 ad 1. Unde parabola ad parallelogrammum erit ut 2 ad 3; & complementum ad parallelogrammum ut 1 ad 3 (hoc est, per illum, ut unum ad Indicem seriei Secundanorum unitate auctum.) Sed in *Parabolastro* primo (alias *Paraboloide* cubicali) ubi Ratio Rationis est triplicata figuram deficientem esse ad suum complementum ut 3 ad 1. Unde sequitur complementum ejus esse ad parallelogrammum ut 1 ad 4, (id est, ut unum ad Indicem seriei Tertianorum unitate auctum) & sic de cæteris, ego (excepto de *Parabola*) primus. Quæ cum legisset *Wallisius*, occasionem arripiens furti & verbis assumptis *Primanorum*, *Secundanorum*, *Indicum*, & *Exponentium*, pro suis nunc impudenter venditat, nec tamen, ut suprà ostensum est, demonstravit; nec ab illius Principiis demonstrari possunt. Nam si linea ex infinitis punctis constet, & punctum aliquid sit, infinita erit linea; si punctum sit nihil, longitudinis erit nullius, idemque dici de Superficiebus & Solidis potest.

Prop. 14. & 15. aggreditur centrum gravitatis Sectoris, & Segmenti circuli, sed ambæ, & quæ ab illis dependent falsæ sunt, nec ab eo primo editæ. Sed quoniam in *Rosseto* meo recens edito (quem libellum tibi nunc mitto) Centrum gravitatis semicirculi & Quadrantis, ubi sunt ostendi, reliquas hujus partis secundæ Propositiones præteribo. Nam aliarum etiam Figurarum centra gravitatis suo modo tractat, sed designat nullam. Nescit ubi est, aut quo tendit. In sylva Symbolorum densissima errabundus versatur; nihil videt præter spectra. Iterùm tibi dico, mitte mihi portiuncam nihil au. Geometricum aut Arithmeticum quod non sit purum.

FINIS.

[111.]

ROSETUM Geometricum.

SIVE

PROPOSITIONES ALIQUOT

Frustra antehac tentatæ.

Cum Censura brevi

Doctrinæ WALLISIANÆ de Motu.

AUTHORE

THOMA HOBBES *Malmsburiensi.*

LONDINI:

Excudebat *J. C.* pro *Guilielmo Crook*, ad Signum Draconis viridis in vico vulgò vocato *Without Temple-bar.* 1671.

Ad Lectorem Algebriſtam.

COntroverſiæ noſtræ hoc loco legibus (ſi tibi placeant) paucis imponam finem. Quæras velim, primo, Utrum Series quantitatum æqualium, vel in ratione aliqua certa eadem, vel duplicata, triplicata, &c. creſcentium ſit quantitas finita an infinita. Si infinitam inveneris, ſecundo loco quæras Utrum poſſit illa habere aliquam rationem ad quantitatem finitam. Tertio quæras Utrum linea vel alia magnitudo non ſit capax diviſionis in ſemper diviſibilia, ſive an aliqua quantitas poſſit eſſe infinitè exigua. Si inveneris quantitatem omnem eſſe ſemper diviſibilem; & ſeriem quantitatum æqualium vel ſemper creſcentium æqualiter vel in duplicata vel triplicata ratione eſſe quantitatem infinitam, nec habere rationem ad quantitatem finitam, nec eſſe quantitatem ullam infinitè exiguam, concedes tu mihi doctrinam Walliſianam de Arithmetica Infinitorum, & doctrinam ejuſdem de Motu nuper editam, contra quam infra diſputavi inanem & falſam eſſe, ut ſi per hæc fundatam. Sin ſeries omnis quantitatum æqualium, vel creſcentium (ut ſupra) ſit finita; vel ratio nulla ſit infinitæ quantitatis ad finitam; vel denique ſi quantitas omnis non ſit diviſibilis in ſemper diviſibilia, victus tibi ego cedam. Vale, & meditare hæc.

Ad Lectorem Geometram.

Hinc tibi carpe Roſam (Lector ſtudioſe) recentem
Candidus olfacias Walliſianus edat.

PROP. I. } De *sectione lineæ rectæ extrema & media ratione.*
PROP. II. } Pag. 1,5.
PROP. III. *De Polygonis regularibus.* 8
PROP. IV. *De ratione curvi ad curvam in circulorum circumferentiis.* 15
PROP. V. }
PROP. VI. } *De magnitudine arcus circuli.* 17,
PROP. VII. } 19,22,29
PROP. VIII }
PROP. IX. *De divisione anguli dati.* 33
PROP. X. *De Sinubus, Subtensis, in quadrante circuli.* 35
PROP. XI. *Arcus quadrantis æqualis est semidiametro, una cum Tangente* 30 *gr.*
PROP. XII. *Recta quæ trianguli æquilateri basem* BK *secat a quovis vertice bifariam, sesquialtera est est Tangentis arcus* 30 *gr.* 39
PROP. XIII. *Differentia inter majus & minus segmentum rectæ divisæ extrema & media ratione, dupla est differentiæ inter eandem rectam, & eam quæ potentia est ad ipsam ut* 5 *ad* 4. 40

PROP. XIV. *Si secans arcus 30 grad. secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit æquale semidiagonali quadrati a semidiametro.* 41

PROP. XV. *Digressio de discordia inter calculum linearum, superficierum, & numerorum in demonstrationibus Geometricis.* 43,46

PROP. XVII. *Latus Icosaedri æquale est tertiæ parti semicirculi in sua Sphæra maximi.* 48

PROP. XVIII. *De quadrato aream quadrantis æquali* 52

PROP. XIX. *Inter rectam datam & ipsius dimidiam invenire duas medias proportionales.* 57

PROP. XX. *De centro Gravitatis quadrantis circuli* 60

PROP. XXI. *De centro Gravitatis Bilinei cujus una linea est arcus quadrantis, altera est ejusdem arcus subtensa.* 63

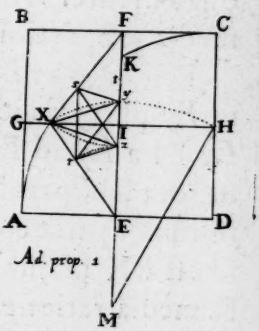
PROP.

Prop. I.

De ſectione lineæ rectæ, extrema & media ratione.

DEſcribatur quadratum *ABCD*, diviſiſq; lateribus in E,F,G,H bifariam; jungatur FE,GH, quæ mutuò ſe ſecabunt in centro quadrati ad I. Deſcribatur etiam centro *D* quadrans *DAC* ſecans *FE* & *GH* in *K* & X.

Ducatur deniq; *EX*. Dico *EX* æqualem eſſe majori ſegmento rectæ *EF* ſive lateris *AB* diviſi extrema & media ratione.



Ducatur *FX*, eaq; ſemidiametro deſcribatur arcus Circuli Xz ſecans *FE* in z. Item ſemidiametro *EX* deſcribatur arcus Circuli Xy ſecans eandem *FE* in *y*, ducanturq; rectæ Xz, Xy.

Ad prop. 1

Jam angulus *EzX* æqualis eſt duobus angulis z*FX*, *FX*z, quia hi interni, ille externus eſt triangulo z*FX*. Rurſus idem angulus *EzX* propter eandem cauſam

ſam æqualis eſt duobus angulis Xyz, yXz. Sunt autem Xzy & FXz æquales. Quare etiam duo anguli XFz & zXy ſunt inter ſe æquales.

Habent ergo duo triangula FXz, yXz duos angulos æquales duobus angulis trianguli zXy, & per conſequens tres tribus. Sunt ergo æquiangula. Quare ut XF vel EX ad Xz, ita eſt Xz vel Xy ad zy. Eſt ergo Xz (ſive Xy media proportionalis) inter EX (ſive EF) & zy.

In rectis EX, FX ſumantur Er, Fs utraq; æqualis Ez, vel Fy. Jungantur rs, & sz. Erunt ergo rX, Xs æquales. Itaq; rs parallela erit rectæ EF; & propterea anguli alterni rsy, Fys, ut & anguli sry, Ezr alterni omnes inter ſe æquales. Erit igitur tum $Fsyr$, tum $Ezsr$ rhombus. Sunt ergo rectæ Fs, sz, ry, rE, Ez, Xy inter ſe æquales.

Et quoniam oſtenſum eſt, Xy mediam eſſe proportionalem inter Ey & zy; erit quoque Fy (æqualis Xy) media proportionalis inter Ey, & zy.

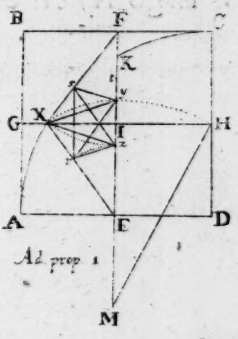
Erit ergo ut Ey ad Fy, ita Fy ad zy; & componendo ut Ey plus yF (id eſt EF) ad Fy plus yz (id eſt Fz vel Ey) ita Ey ad Ez. Eſt ergo diviſæ EF in z & y, ita ut tota EF, pars Ey, & reliqua Ez, item FE, pars Fz, reliqua Fy ſint continue proportionales. Eſt ergo Ey, id eſt EX majus ſegmentum rectæ EF diviſæ extrema & media ratione. Quod erat demonſtrandum. Reprehendat qui poteſt.

Anim-

Animadverſor. *Paradoxum eſt. Neq; Euclides, neq; quiſquam alius hoc docuit. Segmentum majus lateris extrema & media ratione ſecti, eam eſſe lineam rectam quæ dimidium lateris connectit cum tertia parte inſcripti quadrantis quis unquam cogitavit? Segmentum illud omnes hactenus deſignaverunt hoc modo. Producatur recta IE in M, ita ut IE, EM ſint æquales, & IM æqualis lateri. Deinde centro M, radio MH vel MG deſcriptus arcus circuli abſcindet ab* EF *partem ejus (puta* Ey*) æqualem majori ſegmento. Sed quod ea rectæ* EX *æqualis ſit, nuſquam dicunt. Cave ergo Lector ne in re incerta nimium temerè credens, pro veris veris propinqua tantum ſumas. Examina demonſtrationem, & confer cum numeris veris, vel ſurdis, vel conſule Algebriſtas.*

Confectarium 1.

Ductis *sy*, *rz*, erit figura X*syzr* Pentagonum æquiangulum & æquicrurum. Anguli enim X*sr*, X*rs* æquales ſunt propter rectas æquales X*s*, X*r*; & uterq; eorum æqualis angulo ad F propter parallelas *sr*, F*y*; & anguli *rsz*, *rsy* æquales uterq; eidem angulo ad F propter Rhombos E*s*, F*r*. Angulus autem *y*X*z* oſtenſus eſt æqualis angulo ad F. Angulo item *y*X*z* æqualis eſt angulus X*zr* propter *rz*, X*y* parallelas. Deniq; anguli X*zs*, X*yr* æquales ſunt eidem angulo *y*X*z* propter baſes X*s*, X*r*, *yz* æquales.



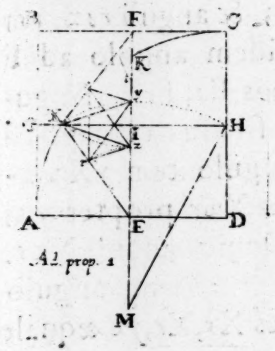
Con-

Conſectarium 2.

Quadratum a majore ſegmento Ey æquale eſt duobus quadratis, *viz.* quadrato a Sinu recto 30 gr. & dimidio quadrato a totidem graduum chorda. Eſt enim EI æqualis Sinui recto 30 *gr.* & quia (ducta chorda XK) triangulum XKI fit æquicrurum & rectangulum, erit quadratum ab XI dimidium quadrati a chorda XK; poteſt autem Ey, id eſt EX utramq; *EI* & XI.

Conſect. 3.

K*y* eſt dimidia FI. Secetur FI bifariam in *t*. Quoniam ergo F*y* plus *y*I, & I*t* plus *t*F ſunt æquales; quanto F*y* major eſt quam F*t*, tanto *t*I major eſt quam *y*I. Sed F*y* major eſt quam F*t* quantum eſt *ty*. Quare & *t*I, id eſt F*t*, major eſt quam *y*I quantitate eadem *ty*. Dividitur autem F*t* in K, ſicut *t*I in *y*. Quoniam enim *Fy* plus *y*I & IK plus K*F* ſunt æquales; quanto major eſt *Fy* quam IK, tanto major eſt *FK* quam *y*I. Cùm ergo *Ft*, æqualis ſit *ty* plus *y*I, erit *Ft* diviſa in K, ſicut *t*I in *y*. Quare *t*K æqualis eſt *y*I; & K*y* æqualis FK plus *y*I. Ergo K*y* eſt dimidio FI.



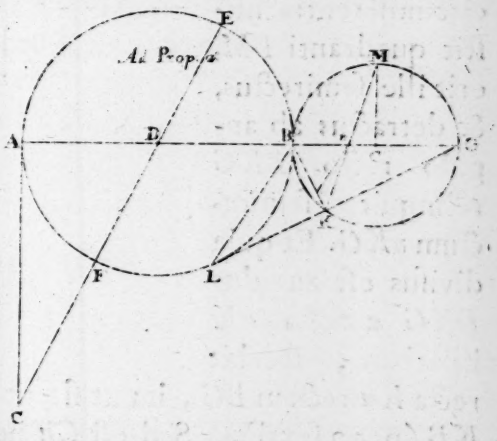
Al. prop. 1

PROP.

Prop. II.

Dato uno segmento rectæ divisæ extrema & media ratione invenire alterum.

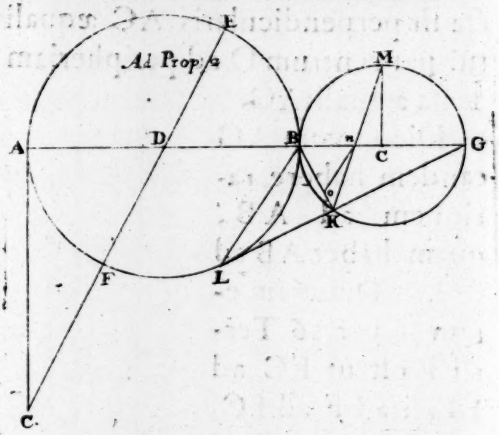
Sit data recta AB segmentum majus rectæ cujuscunq; Secetur AB bifariam in D. Et centro D, intervallo AD describatur circulus AFBE. Deinde ad punctum A erecta sit perpendicularis AC æqualis datæ AB. Et ducatur per centrum D ad peripheriam concavam CE, cui sit facta æqualis AG.



Dico totam AG eandem habere rationem ad AB, quam habet AB ad BG. Quoniam enim (per 36 Tertii) est ut EC ad EF, ita EF ad FC, erit quoq; ut AG æqualis ipsi EC, ad AB æqualem ipsi EF, ita AB ad BG æqualem ipsi FC. Quare (per definitionem extremæ & mediæ rationis) recta AG divisa est extrema & media ratione in puncto B.

Rursus sit BG segmentum minus cujuscunq; rectæ. Secetur BG data bifariam in C. Et centro C, intervallo

CB describatur Circulus BMG. In cujus circumferentia sumpto quadrante BM, ducatur per punctum *n* recta MK ita ut B*n* sit tertia pars datæ BG. Deinde ducantur BK & GK; & sumpta in BK parte B*o* quæ rectæ B*n* sit æqualis, ducatur *on*; cui parallela ducta sit BL secans GK productam in *L*. Postremò erigatur perpendicularis ad GL in puncto L, quæ secet GB productam in D. Centro D, intervallo DB describatur Circulus BLA. Dico GA esse ad AB ut AB ad BG.



Quoniam enim angulus *BMK* in circumferentia insistit quadranti *BM*, erit ille semirectus, & detractus ab angulo recto *BKG* relinquit semirectum *nKG*. Et quia divisus est angulus *BKG* a recta *nK* bifariam, secabit recta *Kn* rectam *BG*, ita ut sit, ut *Gn* ad *nB*, ita *GK* ad *KB* (per 3 sexti). Sed est *Gn* per constructionem dupla *Bn*. Itaq; & *GK* est dupla KB. Et quoniam ponitur *Bo* æqualis *Bn*, erit angulus *onB* æqualis angulo B*on*. Et quoniam parallelæ sunt *no* & BL erit angulus LBD æqualis angulo *on*B. Item, quia parallelæ sunt perpendiculares LB & *no*, erunt anguli DLB & B*on* æquales.

Sunt

Sunt autem B*on* & B*no* æquales. Itaq; DLB & B*no* ſunt æquales. Sed B*no* & DBL ſunt æquales. Ergo DLB & DBL ſunt æquales. Ergo & rectæ *DL*, *DB* illis ſubtenſæ ſunt æquales. Itaq; Circulus deſcriptus intervallo DB tranſibit per punctum *L*. Et quia *DL* perpendicularis eſt ad *GL* tanget *GL* Circulum B*LA* in *L*. Erit ergo (per 36 tertii) ut GA ad *GL*, ita GL ad GB. Eſt autem AB ipſi *GL* æqualis. (Nam cum *GK* dupla ſit BK erit & *GL* dupla rectæ *LD*). Ejuſdem autem dupla eſt recta BA, & proinde æqualis rectæ *GL*. Itaq; erit quoq; ut GA ad AB, ita AB ad BG, & per conſequens rectæ datæ addidimus aliam majorem, &c. quod erat faciendum.

An. *Non video quamobrem nova hæc de Sectione proportionali excogitavit, niſi forte ex eo quod potentiam (non ante notam) ſegmenti majoris cum potentia ſemidiametri comparandq; inveniri poſſe putet Circuli quam quærit magnitudinem.*

Segmentorum iſtorum quantitates exprimi numeris accuratè non poſſunt, neq; illarum quadrata. Verùm prope accedit earum ratio ad rationem 5 ad 3. Nam ſi latus AB ſit partium 8, erit majus ſegmentum ferè 5, & minus ſegmentum ferè $3\frac{1}{7}$. Sunt enim 8, 5, $3\frac{1}{7}$ continuè proportionales; ſed faciunt lineam majorem quam eſt recta AG tanto quanta eſt octava pars partis viceſimæ quintæ ipſius AB; adeo ut differentia totius & majoris ſegmenti ſui, major aliquanto ſit quam tres octavæ partes totius lateris, & ſegmentum majus minus

quam

quam $\frac{1}{7}$; ſed quanto minus in anguſto diagrammate non facile diſcerni poteſt. Item quia ſegmentum illud majus ſubtendit duas quintas partes quadrantis AC, non facile diſtingui poterit differentia ſegmenti ab arcu quem ſubtendit.

Prop. III.

De Polygonis regularibus.

ANntequam doctrinæ hujus aggrediar demonſtrationes, Lectorem ſcire velim, qualem de difficultate ejus ſententiam pronunciavit inſignis Geometra, Aſtronomus & Philoſophus Johannes Keplerus.

Is in libro de Figuris Harmonicis primo, Prop. 45, ſic dicit: *Heptagonus, & ab ea Figuræ omnes quarum laterum numerus eſt primus, extra circulum deſcriptione Geometrica carent; in circulo, etſi laterum quantitas eſt neceſſaria, illam tamen ignorari æquè neceſſe eſt.*

Inferiùs rurſus hæc habet. *Nam hic verſamur nos in Entibus Scientialibus, & pronunciamus rectè, Quod latus ſeptanguli eſt ex non Entibus, puta Scientialibus. Cum enim ſit impoſſibilis ejus formalis deſcriptio, neq; igitur ſciri poteſt a mente humana, cum ſcientiæ poſſibilitatem præcedat deſcriptionis poſſibilitas. Neq; ſcitur a mente omniſcia actu ſimplici æterno, quia natura ſua eſt ex impoſſibilibus.*

Etiam

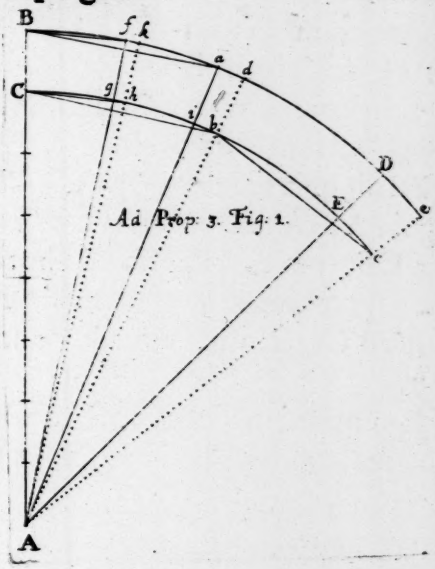
Etiam adhuc inferiùs. *It aq; nullum unquam regulare ſeptangulum a quoquam conſtructum eſt ſciente & volente, & ex propoſito agente ; nec conſtrui poteſt ex propoſito. Sed benè fortuito conſtrui poſſet ; & tamen ignorari neceſſe eſt ſitne conſtructum an non.*

Hæc qui vera eſſe crederet, latuſq; Heptagoni invenire conaretur, arrogantem dixeris Lector an inſanum ? Sed ego nec vera, nec modeſta, nec pia eſſe credo.

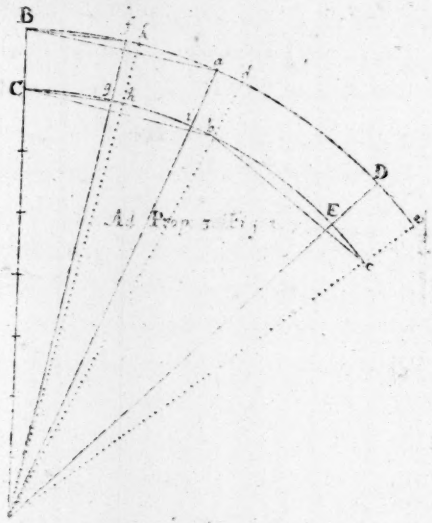
Deinde de eo quod ad hanc rem conferre videatur poſſe Algebra, ſic ſcribit. *Concludimus igitur, Analyſes iſtas Coſſicas alienas eſſe a præſenti contemplatione, nec ullam conſtituere gradum ſcientiæ.*

Equidem id credo ; & quia fortuitò conſtrui poſſe concedit ; & Clavius conſtructionem mechanicam aliquam ejus indicat, doctrinam hanc aggrediar, & primo loco conſtructionem Heptagoni.

In Circulo dato Heptagonum deſcribere regulare. Secetur recta quæcunq; AB in octo partes æquales, quarum AC ſit ſeptem. Tum Centro A ſemidiametris AB, AC deſcribantur duo Circuli. Deinde ſumatur perimetri Circuli



exterioris (quod facile factu eſt) pars octava BD, ducaturq; AD ſecans circulum interiorem in E, quæ abſcindet partem ejus CE octavam.



Secetur arcus BD bifariam in *a*, ducanturq; chordæ B*a*, *a*D. In arcu autem CE applicetur recta C*b* æqualis B*a*, & rurſus *bc* æqualis eidem B*a* ſive *a*D ; nam ſunt æquales.

Dico ductam rectam C*c* eſſe latus Heptagoni in Circulo CE.

Quoniam enim AB eſt ad AC ut 8 ad 7, etiam perimeter Circuli BD ad perimetrum Circuli CE erit ut 8 ad 7.

Etiam quia ſectores ABD, ACE ſunt ſimiles, & triangula ABD, ACE ſimilia, erit tum arcus BD ad arcum CE, tum chorda BD ad chordam CE ut 8 ad 7.

Propter eandem cauſam duæ chordæ B*a*, *a*D, erunt ad C*i*, *i*E duas chordas dimidiati arcus CE ut 8 ad 7.

Jam quoniam (per conſtructionem) tum chordæ B*a*, *a*D, duabus chordis C*b*, *bc*, utræ utriſq; & inter ſe ſunt æquales,

æquales, erunt & illæ chordæ ad duas chordas dimidii arcus CE ut 8 ad 7 : & propterea etiam arcus Cc ad arcum CE ut 8 ad 7. Ductis etiam A*b*, A*c*, & perductis ad circumferentiam exteriorem in *d* & *e*, duæ chordæ B*d*, *de* erunt ad duas chordas B*a*, *a*D, ſive C*b*, *bc*, ut 8 ad 7.

Rurſus ſecetur arcus B*a* bifariam in *f*, ducaturq; A*f* ſecans arcum *CE* in *g*, ducanturq; chordæ *Bf*, *Cg*. Similiter ſecetur arcus *Bd* bifariam in *k*. Ducta ergo *Ak* ſecante arcum *CE* in *h*, erit chorda *Bk* ad chordam *Ch* ut 8 ad 7. Et per conſequens, quatuor chordæ *Ch* ad quatuor chordas *Cg* ut 8 ad 7. Similiter ſi duo arcus *Ch* & *Cg* biſecentur, & eorum biſegmenta in infinitum, eorum chordæ ſingulæ ad ſingulas, erunt in ratione 8 ad 7. Sed chordæ ſic ſumptæ in quovis arcu infinities, ſunt (omnes ſimul) ipſe arcus. Quare arcus *Cc* eſt ad arcum *CE* ut 8 ad 7. Et arcus *Cc* eſt ſeptima pars totius perimetri per *C*. Ergo ducta recta *Cc* eſt latus Heptagoni in circulo per C.

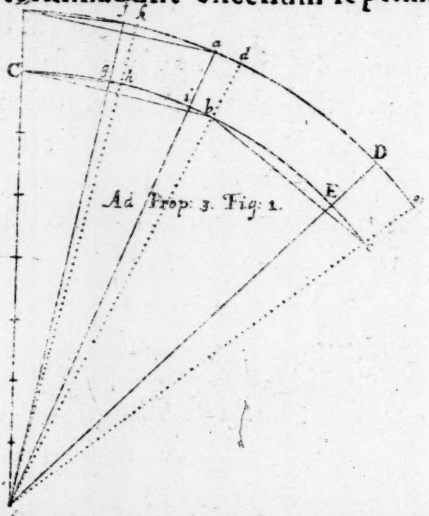
Ducta autem A*e* abſcindit ſeptimam partem perimetri per B.

An. *Quod chordas partium arcus infinities ſumptas æquales dicat eſſe ſimul ſumptas ipſi arcui, incredibile eſt; ſic enim ſingulæ chordæ æquales deberent eſſe ſuis arcubus, quod eſt impoſſibile.*

Nam ſi ſingulæ chordæ ſingulis arcubus quos ſubtendunt non ſunt æquales, poſſunt illi arcus ſinguli & eorum biſegmenta rurſus biſecari; quod eſt contra ſuppoſi-

tum. Inventum ergo est latus Heptagoni; quod est propositum.

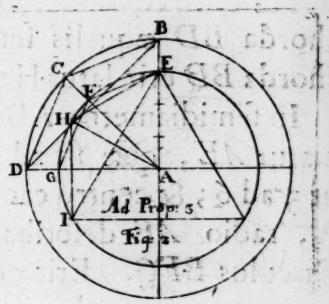
Consectarium 1. Ex hac demonstratione apparet methodus inveniendi partem septimam anguli dati. Nam ad arcus dati utrumq; terminum si a centro circuli ducantur lineæ rectæ, deinde semidiameter secetur octofariam, sumanturq; a centro partes ejus septem descripto inde circulo, erit arcus major ad minorem ut 8 ad 7. Quare duo arcus majoris bisecti ad duos arcus minoris bisecti erunt ut 8 ad 7. Etiam eorum chordæ erunt ut 8 ad 7. Itaq; duæ chordæ majoris ad arcum minorem applicatæ determinabunt excessum septimæ partis minoris perimetri supra partem octavam ejusdem perimetri. Manifestum enim est arcum Ec esse septimam partem arcus Cc. Nam sive arcus dividendus sit septima pars perimetri, sive major, sive minor, demonstratio erit semper eadem.



Consect. 2. Arcus descriptus radio BC æqualis est octavæ parti perimetri circuli cujus radius est AB & pars septima perimetri per AC, & pars sexta perimetri per punctum sextum rectæ AB &c. Ex-

Experiamur methodum hanc noſtram in Polygonis notis, & videamus an per illam ex Tetragono (id eſt quadrato) inveniri poteſt Trigoni latus.

Deſcribatur centro A Circulus BCD, cujus BD ſit quadrans. Ducta ergo chorda *BD* eſt in eo Circulo latus Tetragoni.



Centro eodem A, ſemidiametro AE, quæ ſit ad AB ut 3 ad 4; deſcribatur Circulus EFG. Erit ergo Circulus per B ad Circulum per *E* ut 4 ad 3.

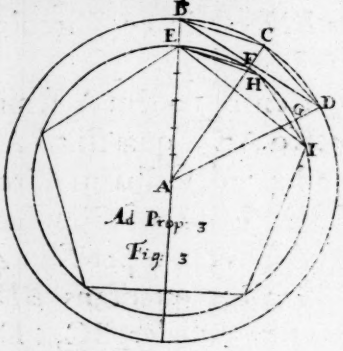
Secetur quadrans *BD* bifariam in C, ducanturq; chordæ æquales, BC, *CD*. Ducta ergo *AC* ſecante *EG* in *F*, erit arcus *EF* pars octava perimetri per *E*, & æquales arcui *FG*.

Ergo tum arcus tum chordæ *BC*, *CD*, erunt tum ad arcus tum ad chordas *EF*, *FG* ut ad 4 ad 3.

Jam a puncto *E* in Circulo per *E* applicentur *EH*, *HI* duabus chordis *BC*, *CD* utraq; utriq; æqualis. Quare duæ chordæ *EH*, *HI* ſunt ad duas chordas *EF*, *FG* ut 4 ad 3, id eſt ut arcus *BD* ad arcum *EG*. Quare ut arcus *EI* ad arcum *EG*, ita eſt 4 ad 3. Ergo arcus *GI* eſt tertia pars arcus *EG*, id eſt pars duodecima totius perimetri per *E*; & arcus *EI* tertia pars perimetri ejuſdem. Demonſtratio eadem eſt quæ de Heptagono. Ergo ducta chorda *EI* eſt latus Trigoni in Circulo per *E*.

Experiamur eandem rursus methodum ab Hexagono ad Pentagonum.

Centro A semidiametro AB describatur Circulus *BCD*; & in circumferentia ejus a puncto B applicetur chorda *BD* æqualis semidiametro AB. Ducta ergo chorda *BD* erit latus Hexagoni in circulo per B.



In semidiametro AB sumatur *AE*, quæ sit ad *AB* ut 5 ad 6; & centro eadem A, radio *AE* describatur Circulus *EFG*. Erit ergo perimeter per *B* ad perimetrum per *E* ut 6 ad 5. Secetur BD a recta AC (secante circulum per *E* in *F*) bifariam in C; ducanturq; chordæ BC,CD; quibus æquales applicentur in circulo per *E*, chordæ *EH*, *HI*.

Sunt ergo duæ chordæ *EH*, *HI* ad duas chordas *EF*, *FG* ut arcus BD ad arcum EG, id est ut 6 ad 5; & arcus *EI* ad arcum *EG* ut 6 ad 5. Est ergo arcus *GI* quinta pars arcus *EG*, id est trigesima pars perimetri; & totus arcus *EI* sex trigesimæ partes (id est pars quinta) totius perimetri per *E*. Eadem est demonstratio quæ in Heptagono. Ducta ergo chorda *EI* est latus Pentagoni in Circulo per *E*.

Cor. Potest ergo inveniri latus Pentagoni sine ope sectionis semidiametri in extremam & mediam rationem.

An.

An. *Concinna quidem hæc ſunt ; ſed caveat Lector concinnitas iſta ne fraudem ferat , adeatq; ſi ſapit, examen illud accuratiſſimum, Arithmeticam ſpecioſam.*

Cor. 2. Ut ab exteriore Circulo ad interiorem hactenus proceſſit demonſtratio, ita procedet etiam ab interiore, ut ex Trigono dato , inveniatur Tetragonum, Pentagonum ex Tetragono ; Hexagonum ex Pentagono, & ſic deinceps. Dato enim latere Pentagoni EI, dantur duæ chordæ EH, HI. Quare ſi diametro AE, addatur ſui ipſius pars quinta, nempe EB, & deſcribatur arcus BD, duæ chordæ EH, HI æquales erunt duabus chordis BC, CD utraq; utriq; & chorda BD latus Hexagoni in circulo per B.

Prop. IV.

De ratione curvi ad curvum in Circulorum circumferentiis.

1° Circulus ut a ſemidiametro deſcribitur circini altero pede fixo, altero circumducto , ita etiam deſcriptus intelligi poteſt a linea recta data uniformiter flexa , id eſt ſecundum angulos ſemper æquales. Qua quidem flexione , ſi anguli ſumantur numero infiniti, deſcribetur Circulus. Circulus enim ſua natura nihil differt a Polygono laterum numero infinitorum. Flexio autem

autem eſt diſceſſio a rectitudine ſecundum angulum aliquem, id quod eſt Curvedo.

2° Curvedinum autem alia major alia minor eſt ; & propterea curvedo eſt quantitas, pertinetq; ad Subjectum Geometrarum, & maximè illorum qui ſcribunt de Magnitudine Circuli & inſcriptione in Circulo Polygonorum ; Quanquam de hac re nihil nobis traditum ſit a veteribus.

3° Quam rationem habet in eodem Circulo, angulus in circumferentia ad angulum in circumferentia, eandem habet curvitas majoris arcus ad curvitatem minoris. Cum enim curvedo nihil aliud ſit quam deflexio (per angulum in circumferentia) a rectitudine, neceſſe eſt ut major angulus faciat majorem curvedinem. Ex quo ſequitur curvitates arcuum in eodem circulo eſſe inter ſe ut anguli.

4° In diverſis circulis curvedo majoris perimetri minor eſt curvedine minoris, in ratione Radii ad Radium, ſive diametri ad diametrum reciproca. In magno enim Circulo, ut in maximo circa terram Circulo curvitudo ad multa ſtadia diſcerni nulla poteſt ; in annulo ubiq; cernitur ; in mediis ergo minores habent curvitatem majorem, idq; propter hanc ipſam cauſam quod diameter minor eſt. Id quod lumine naturali manifeſtum eſt.

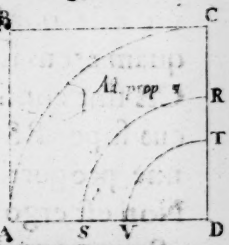
5° Eadem chorda aliqua (ſi ratio arcus in circumferentia ad perimetrum & radii ad radium ſit eadem) majorem portionem ſubtendit perimetri ſuæ, quam peri-

perimetri majoris, pro ratione majoris perimetri ad minorem. Cauſa enim quare eadem recta majorem ſubtendit partem minoris perimetri quam majoris, unica & eſſentialis eſt minoris major curvitas. Itaq; ſi curvitas in ſemicirculo (in ſemicirculo dico, quia curvitas perimetri alterius contraria procedit via; & propterea ſubtenſæ arcuum quæ cum ipſis ſimul creſcebant, ultra ſemicirculum decreſcunt) minoris arcus ad curvitatem majoris ſit ut 8 ad 7, chorda quæ ſubtendit partem octavam majoris, ſubtendet partem ſeptimam ſemiperimetri minoris.

6° Itaq; etiam angulus in circumferentia perimetri minoris (quia ſubtenſæ ſunt æquales) erit ad angulum in majore perimetro ut perimeter major ad minorem.

Prop. V.

Media proportionalis inter ſemidiametrum Circuli & ejuſdem duas quintas æqualis eſt duabus quintis quartæ partis Circuli.



Deſcribatur quadrans Circuli DAC, & compleatur quadratum ABCD. In latere DC ſignetur DT duæ ipſius quintæ; & inter DC & DT ſumatur media proportionalis DR, ut ſint DC, DR, DT continue proportionales; & deſcribantur arcus RS, TV quadrantales. Eſt ergo arcus TV duæ quintæ arcus CA.

Dico arcum TV & rectam DR eſſe æquales. Sup-

 pona-

ponatur datam esse rectam æqualem arcui AC, & ab ea descriptum arcum quadrantalem. Erunt ergo DC,CA, arcus super CA continuè proportionales.

Scribantur seorsim DC.CA. Arcus super CA ∴
Et sub his DR.RS. Arcus super RS ∴
Rursus sub his DT.TV. Arcus super TV ∴

Erunt autem in singulis ordinibus Antecedentes ad Consequentes ut semidiameter ad arcum quadrantis prorsum; & ut arcus quadrantis ad semidiametrum retrorsum.

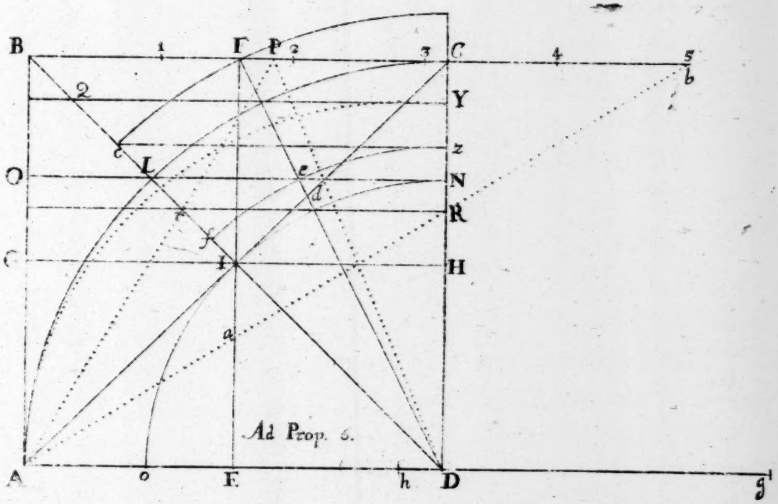
Ut ergo DC ad RS, ita est RS ad arcum super TV. Itaq; DC, RS, arcus super TV erunt continuè proportionales. Et quoniam DC,CA, Arcus super CA sunt etiam continuè proportionales, habentq; Antecedentem primam DC communem; ratio Arcus super CA ad Arcum super TV, erit (per Eucl. 14.28) duplicata rationis CA ad RS; & propterea Arcus super RS est medius proportionalis inter arcum super CA. & Arcum super TV. Jam si DC major sit quam RS, etiam RS major erit quam arcus super TV; & Arcus CA major quam arcus super RS. Quare,cum DC,CA, arcus super CA sint continuè proportionales, Arcus super TV, Arcus super RS, Arcus super CA non possunt esse continue proportionales. Quod est contra demonstrata. Non est ergo DC major quam RS.

Supponatur rursus RS major quam *DC*; erit ergo Arcus super RS medius proportionalis inter Arcum super *TV*, & majorem quam est Arcus super *CA*. Redibit ergo inconveniens. Quare semidiameter DC æqualis est Arcui *RS*; &

per

per consequens arcus TV, id est duæ quintæ arcus CA & recta DR sunt æquales. Id est, media proportionalis inter semidiametrum & duas ejus quintas æqualis est duabus quintis quartæ partis Circuli circumferentiæ. Quod erat demonstrandum.

Prop. VI.



DEscribatur quadratum ABCD, & secetur tum ab EF, GH, tum a Diagonalibus AC, BD (concurrentibus in centro I) quadrifariam.

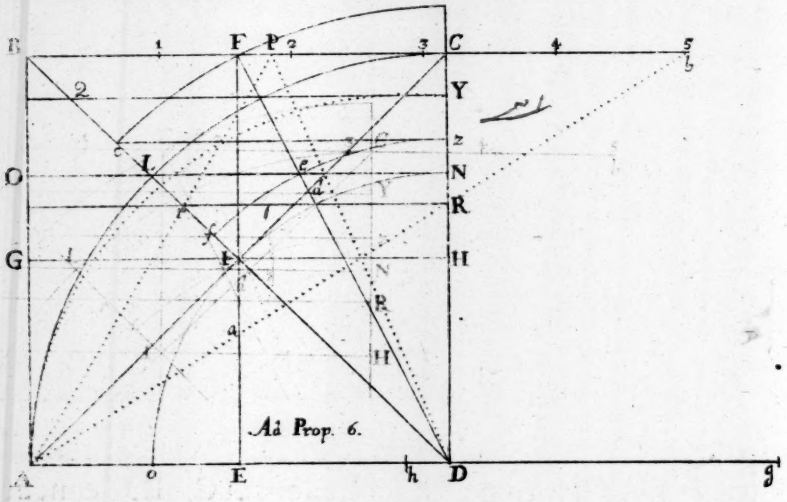
Deinde inter DC & ipsius duas quintas sumatur media

dia proportionalis DR ; & juncta AR ſecans EF in *a*, producatur donec occurrat lateri BG producto in *b*.

Dico rectam B*b* quintuplam eſſe rectæ E*a* ſive quintæ partis arcus AC.

Quoniam ſimilia ſunt triangula *ADR*, *ABb*, & arcus quadrantis deſcripti a *DR* eſt æqualis lateri *DC*, ſive *AB*, erit quoq; arcus deſcriptus ab *AB* æqualis rectæ *Bb*. Cum ergo *DR* ſit duæ quintæ arcus *AC*, & per conſequens, *Bb* quinq; quintæ, erit *Bb* quintupla rectæ *Ea*, quæ, cum ſit dimidia rectæ *DR*, eſt quinta pars arcus *AC* ſive rectæ *Bb*. Quod erat demonſtrandum.

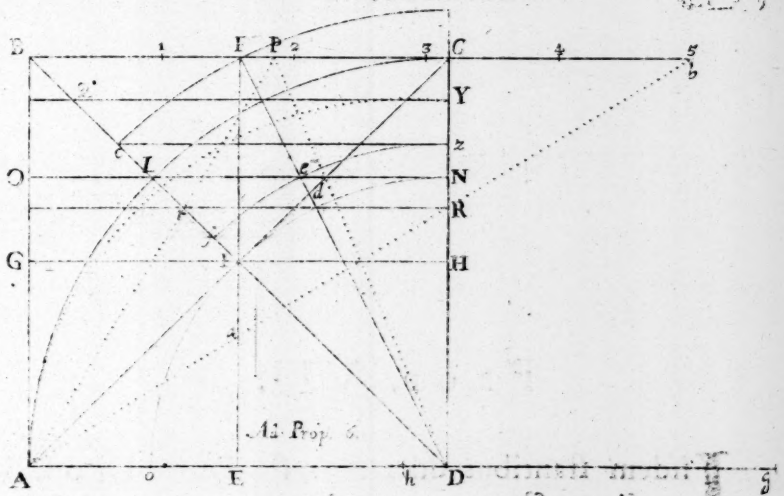
Si ergo ſumatur in latere *BC* pars *Bl*, æqualis *Ea*, ea quinquies repetita terminabitur in *b*.



Scho-

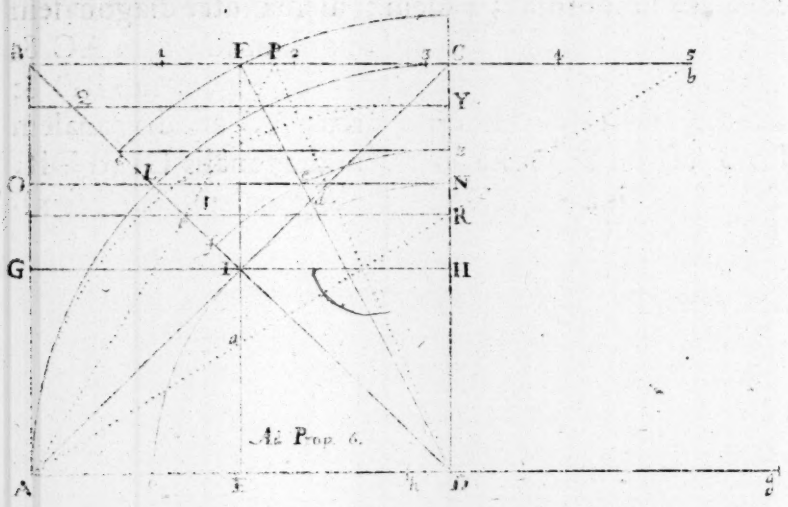
Scholium.

Si duæ rectæ quæcunq; mediam habeant inter se proportionalem quæ sit æqualis lateri AB; erit ut arcus AC ad unam earum, ita reciprocè reliqua earum erit ad duas quintas ipsius arcus AC. Exempli causa, quia latus AB est media proportionalis inter arcum AC & duas ejus quintas; eademq; media inter diagonalem AC & semissem ejus DI, rectangulum sub arcu AC & duabus ejus quintis æquale erit rectangulo sub BD & semisse ejus DI. Ut ergo arcus AC ad diagonalem suam AC vel BD, ita erit semidiagonalis DI ad DR. Et ut semissis arcus AC ad semidiagonalem, ita est semidiagonalis ad *DR*.



Conſect.

Apparet hinc magnitudo octantis totius perimetri. Nam ſi rectæ DR addatur Rz pars ipſius quarta, erit tota *Dz* quinq; decimæ, id eſt ſemiſſis arcus AC. Cum enim *DR* ſit duæ quintæ, id eſt quatuor decimæ, erit Dz, quinq; decimæ.



Prop. VII.

IIſdem ſtantibus ducatur recta DF. Dico DF mediam eſſe proportionalem inter arcum AC & ipſius ſemiſſem.

Duca-

Ducatur recta *Rr* parallela lateri BC, secans diagonalem DB in *r* & DF in *d*. Quoniam ergo DF secat latus BC bifariam in F, secabit *Dd* rectam *Rr* bifariam in *d*. Ducatur LN parallela eidem lateri BC, secans DF in *e*, & latus DC in N. Erunt ergo æquales DN & NL, & utraq; earum æqualis semidiagonali DI ; & NL erit divisa bifariam in *e*.

Quoniam ergo, per Scholium propositionis præcedentis *Dz*, *DN*, *DR*, sunt continuè proportionales, si radio *Dz* descriptus sit arcus *zf*, secabit ille rectam NL in *e* ; item si radio *DN* describatur arcus circuli NI, secabit ille rectam *Rr* in *d*.

Describatur jam arcus quadrantalis NIO, qui, ut ostensum est, transit per *d*. Quoniam ergo *DR* est radius circuli cujus quarta pars perimetri æqualis est lateri *DC*, erit recta *Dd* sive *DN* radius circuli cujus quarta pars perimetri est æqualis rectæ *DF*. Sed recta *DN* est radius circuli cujus quarta pars perimetri est ipse arcus *NIO*.

Sunt ergo recta *DF* & arcus *NIO* æquales. Arcus autem *NIO* est medius proportionalis inter arcum *AC* & ejus semissem, ergo etiam recta *DF* est media proportionalis, &c. Quod erat demonstrandum.

Cor.

Si a puncto z ducatur recta *zc* parallela lateri *BC*, secans diagonalem *DB* in *c* ; erit *Dc* æqualis *DF*. Erit enim *Dc* media proportionalis inter duplam & simplam *Dz*. Est autem *Dz* ostensa æqualis dimidio arcui *AC*.

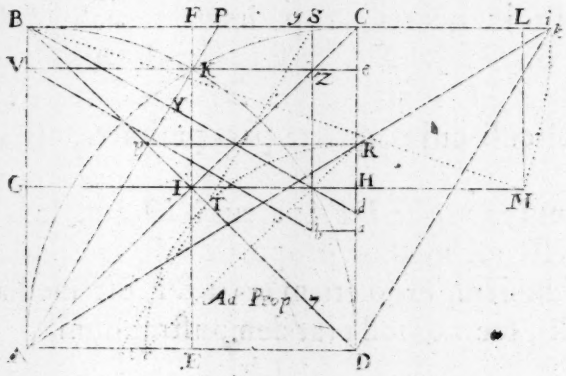
Con-

Conſect. 1.

Arcus *AC*, id eſt recta *Bb* eſt media proportionalis inter latus *DC* & quintuplam ſemilateris *BF*. Cum enim duæ quintæ lateris *DC*, recta *DR*, quinq; quintæ lateris *DC* ſint continè proportionales; ſi proportio continuetur, erunt *DR*, *DC*, & media proportionalis inter DC & quintuplam ſemilateris *BF* continuè proportionales. Itaq; *Bb* æqualis eſt rectæ quæ poteſt decem ſemilatera. Unde etiam ſequitur arcum quadrantalem deſcriptum ab arcu *AC* extenſo in rectitudinem, quintuplam eſſe ſemilateris.

Conſect. 2.

Iiſdem ſtantibus, lateri AD adjiciatur in directum



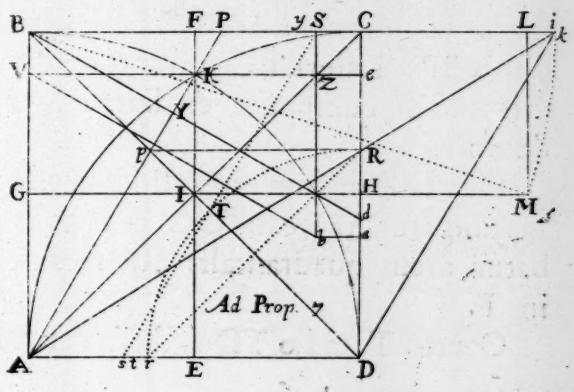
Dg æqualis rectæ D*z*, id eſt arcui CL; deinde ſecta tota A*g* bifariam in *h*, centro *h*, radio *h*A, vel *hg* deſcribatur arcus circuli AY ſecans latus *DC* in *Y*. Erit ergo *DY* media proportionalis inter latus *DC* & D*z*. Ductâ ergo rectâ *YQ* parallela lateri *BC* ſecante diagonalem *DB* in *Q*, erit *YQ* latus quadrati (per demonſtrata ab Archimede) æqualis Sectori *DCL*, ſive octanti totius circuli deſcripti ſemidiametro DA.

Animad. *Non ergo tranſibit YQ per interſectionem rectæ DF & arcus CL, ut ille ſuppoſuit. Nam id refutatum ſatis eſt ab Walliſio; quia ſi ita eſſet, recta Dz quam hic æqualem eſſet dicit arcui CL, æqualis eſſet quatuor quintis lateris; ut ille demonſtravit.*

Conſect. 3.

Sequitur hinc arcum AC æqualem eſſe compoſitæ ex latere BC & Tangente 30 graduum.

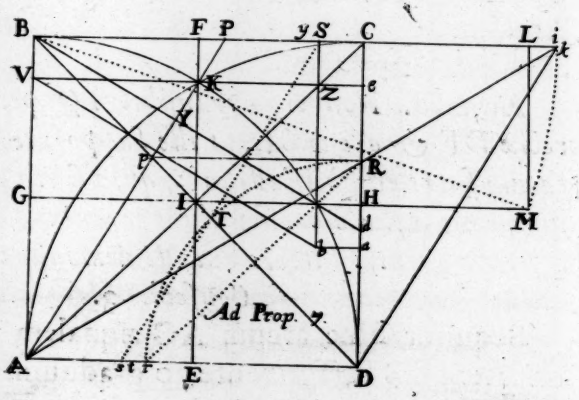
Quoniam enim *DC* eſt media proportionalis inter arcum *AC* & *DR*; ſi ad *DR*, & *DC* aſſumatur tertia proportionalis, erit illa æqualis lateri *BC* una cum Tangente 30 graduum. Sed renovandum eſt diagramma.



Sit ergo ABCD quadratum diviſum quadrifariam tum a rectis EF, GH

tum a diagonalibus AC, BD concurrentibus in I. Ducantur quoq; arcus quadrantales AC, BD ſecantes EF, GH in K & X.

Sumantur in productis BC, GH, rectæ CL, HM, utraq; ſemilateri æqualis, jungaturq; BM. Ducta ergo BM, illa ut ſemidiametro deſcribatur arcus circuli ſecans BC productam in *i*. Quoniam igitur BL poteſt novem ſemilatera, & LM unum, poterit BM, id eſt B*i* decem ſemilatera, & proinde B*i* eſt æqualis arcui *AC* vel *BD*.



Ductâ AK & producta ad latus BC in P, erit AP ſecans 30 graduum, & BP Tangens 30 graduum, & AP dupla BP. Lateri BC adjiciatur C*k* æqualis BP; & erit tota B*k* compoſita ex latere & Tangente 30 graduum.

Demonſtrandum ergo eſt idem eſſe punctum *i* & *k*.

Jungatur A*i* ſecans DC in R; & radio DR deſcribatur arcus quadrantalis Rr ſecans diagonalem BD in T.

Centro T, radio TD deſcribatur arcus circuli ſecans BC

BC in S, & producatur ST ad latus AD in *s*. Sunt ergo DR, DT, TS æquales.

Quoniam autem AB eſt media proportionalis tum inter AP & EK, tum inter B*i* & *DR*, tum etiam inter diagonalem *BD* & ſemiſſem ejus CI, erit ut B*i* (ſive arcus AC) ad *BD*, ita CI ad *DR* ſive ST. Atq; etiam ut BD ad AP, ita reciprocè EK ad DR vel ST. Quare ſi ſumatur in latere BC recta quædam æqualis EK, puta recta B*y*, & inde ad latus AD ducatur *yt* parallela AP, erit ut B*i* ad *yt*, ita B*y* ad ST. Quare recta *yt* tranſibit per T, & erit *yT* æqualis ST. Quod eſt abſurdum. Eſt ergo BS æqualis EK, & S*s* æqualis AP. Quia igitur AP eſt æqualis D*k*, erit D*k* parallela S*s*. Ut ergo B*k* ad D*k*, ita eſt BS ad ST. Sunt ergo B*i* & B*k* æquales. Quod erat propoſitum.

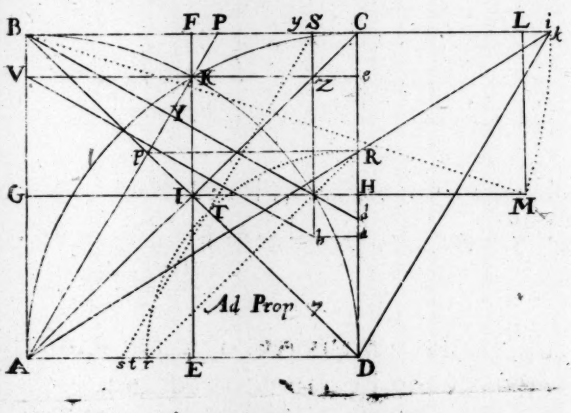
Conſect. 4.

Sequitur hinc rectam HR (quæ eſt differentia qua duæ quintæ arcus AC ſuperant ſemilatus DH) æqualem eſſe FK ſinui verſo 30 graduum.

Nam ſi in latere AB ſumatur AV æqualis EK; & radio AV deſcribatur arcus circuli ſecans AP in Y, erit VY æqualis ſemilateri BF, vel BY, & AY æqualis AV; & propterea BY ibit ad X, eademq; BY erit Tangens 30 graduum in circulo cujus ſemidiameter eſt AV ſive EK. Productâ ergo VK ad diagonalem AC, in Z, erit VZ æqualis EK. Quare demiſſa perpendicularis a puncto S tranſibit per Z & X; & BX producta ad latus DC in *d*, erit C*d* æqualis C*i*. Sed SX eſt æqualis ſemilateri;

lateri; & proinde ZX æqualis KZ.

Sumatur in latere CD recta C*a* æqualis DR, ducaturq; *ab* parallela lateri BC, secans ZX productam in *b*, jungaturq; V*b*. *Q*uoniam ergo est ut B*i* (id est BC plus tangente C*i*) ad secantem B*d*, ita BS, ad DR, id est ad Z*b*; & ut BC ad C*d* Tangentem, ita VZ ad SX, si in VX producta sumatur Z*b* æqualis SX, erit *Z b* Tangens 30 graduum in arcu descripto ab VZ.



Juncta ergo V*b* erit æqualis lateri BC. Et quia Z*b* est Tangens 30 graduum in Circulo cujus Radius est VZ, & C*d* Tangens 30 graduum in circulo cujus Radius est AB, erunt B*d*, V*b* parallelæ, & juncta V*b* æqualis lateri BC; & BC plus C*d* æqualis rectæ B*i*.

*Q*uoniam ergo est ut BC plus C*d* (id est B*i*) ad B*d*, ita VZ ad *DR*; & ut eadem *Bi* ad *Vb*, ita *Vb* ad *DR*, erit Z*b* æqualis ipsi *DR*. Nam hi duo analogismi in alio puncto rectæ SX nullo modo constitui possunt.

Ablatis ergo æqualibus *DH* a *DR*, & Z*b* ab S*b*, restant æquales HR, SZ. Sed SZ æqualis est FK. *Q*uare HR, FK sunt æquales.

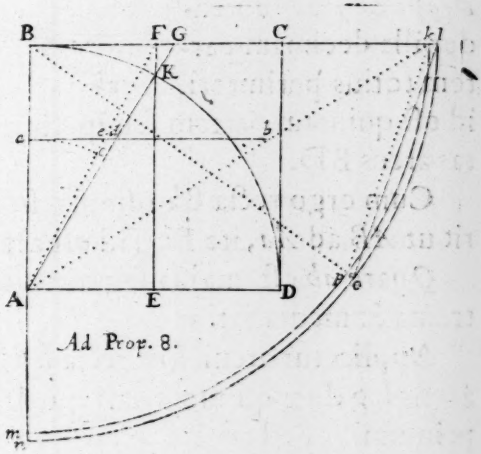
Cor.

Cor. Juncta *Rr* transſibit per *X*.

Sequitur etiam hinc (producta *VZ* ad *DC* in *e*) rectam *Re* duplum eſſe differentiæ inter GB ſemilatus & majus ſegmentum diviſæ AB extrema & media ratione. Nam (per *Cor. Prop.* hujus primæ) quarta pars lateris *AB* vel *DC* æqualis eſt rectæ *FK* una cum differentia inter ſemilatus & majus ſegmentum lateris. Quare dimidium lateris, id eſt *ae*, æqualis eſt duplæ *FK*, & duplæ differentiæ inter majus ſegmentum lateris & ſemilatus. Sed *a*R eſt dupla FK; quare Re eſt dupla differentiæ inter majus ſegmentum lateris & ſemilatus.

PROP. VIII.

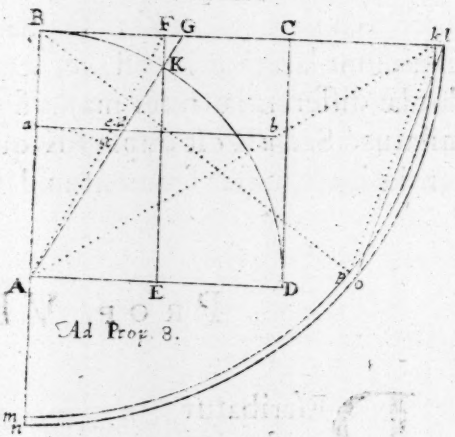
DEſcribatur rurſus quadratum ABCD, & arcus quadrantalis BD; & lateri BC adjiciatur C*k* æqualis Tangenti 30 graduum; ducaturq; recta A*k*. Deinde in latere AB ſumatur A*a* æqualis rectæ A*c* factæ ſe-



I gmento

gmento majori lateris AB (divisi extrema & media ratione) æquali. Postremò ducatur *ab*, parallela lateri BC secans A*k* in *b*.

Dico rectam *ab*, subtensuram esse duas quintas arcus quadrantalis *km* descripti semidiametro B*k*, & duas illas quintas æquales esse lateri AB.



Quoniam enim A*a* est majus segmentum lateris BC divisi extrema & media ratione, ea latus est Decagoni in Circulo cujus semidiameter est AB (Per *Elem.* 14. *Prop.* 4.) & subtendet illa decimam partem totius perimetri, id est quintam partem semiperimetri, id est duas quintas arcus BD.

Cum ergo recta B*k* ostensa sit æqualis arcui *BD*, erit ut *AB* ad *Aa*, ita B*k* (id est arcus *BD*) ad *ab*.

Quare *ab* est majus segmentum rectæ B*k* divisæ extrema & media ratione.

Applicetur arcui *km* recta *kp* æqualis *ab*. Erit ergo arcus *kp* duæ quintæ arcus quadrantalis *km*. Quod est primum. Sed arcus *km* (per *Corol.* 4. *Prop.* 7.) æqualis est quinq; semilateribus quadrati ab AB. Quare arcus

cus kp æqualis est ipsi lateri AB. Quod restabat demonstrandum.

Consectarium.

Si lateri BC adjiciatur recta Cl æqualis *ab*, & centro B intervallo Bl describatur arcus quadrantalis *ln*, & juncta Bp producatur ad *ln* in *o*, ducta chorda *lo* æqualis erit arcui kp, sive lateri AB. Nam (per *Elem.* 13. *Prop.* 5.) latus BC erit majus segmentum totius Bl. Quare latus BC subtendit duas quintas arcus totius *ln*. Cum ergo angulus kBp sit duæ quintæ anguli kBm, etiam *lo* erit duæ quintæ arcus *ln*. Quare recta *lo* quæ illum subtendit est æqualis lateri BC, eademq; æqualis arcui kp.

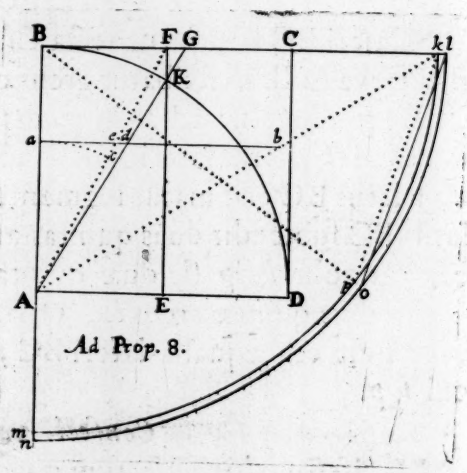
Consect. 2.

Manifestum hinc est, tum quadratum ipsum ABCD, tum omnes rectas ab A centro ad latus BC (si opus sit productum) secari ab *ab* (si opus sit producta) in extremam & mediam rationem. Nam quadratum ABCD dividitur eadem ratione qua ipsum latus AB in *a*. Item dividuntur ab eadem *ab* omnes rectæ ductæ ab A ad BC (quando opus est productam) eadem ratione qua AB dividitur in *a*. Quare (per *Elem.* 14. *Prop.* 2.) dividuntur in extremam & mediam rationem.

Cor. Apparet hinc inveniendi quarumcunq; rectarum segmenta proportionalia methodus manifesta & brevissima. Exempli causa, Si quæratur majus segmentum Secantis 30 graduum. Ducatur AK, & producatur ad latus BC in G, quæ est secans 30 graduum; secet

cet ea rectam *ab* in *d*; & A*d* est segmentum majus; & residuum est segmentum minus.

Sin quæratur sectio Tangentis 30 graduum, quæ prædictæ Secantis est dimidia, & latus Cubi inscripti Circulo cujus diameter est AB, sumatur semissis ipsius A*d*, id est *ad*; ea erit segmentum majus, & reliqua pars Tangentis erit segmentum minus. Similiter, si secanda sit AF proportonaliter, ducta AF secet *ab* in *e*, & erit A*e* majus segmentum ejus, & *e*F segmentum minus; & dimidia A*e* majus segmentum dimidiæ AF.



Ad Prop. 8.

PROP.

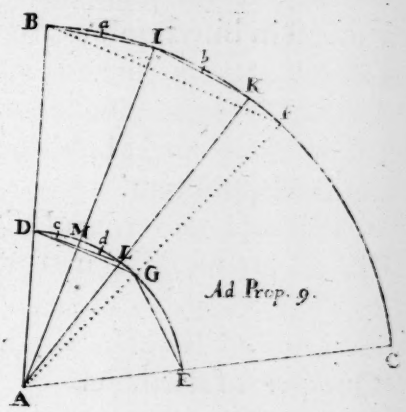
Prop. IX.

Angulum datum ſecare in data ratione.

Sit angulus datus BAC; ſitq; ratio data AB ad AD. Deſcribatur arcus ADE; & ſecetur arcus BC bifariam in F. Quare ducta AF ſecabit quoq; DE bifariam (puta) in G. Ductæ ergo chordæ BF, DG erunt inter ſe ut rectæ AB,AD.

Applicentur duæ chordæ DG, GE ad arcum BF in I & K, ita ut chordæ BI,IK ſint æquales chordis DG,GE utraq; utrique, ducanturq; AI, AK, quarum AK ſecet arcum DE in L; AI ſecet arcum eundem in M.

Dico arcum totum BC ita diviſum eſſe in K, ut arcus BC (ſive angulus datus BAC) ſit ad arcum BK (ſive angulum BAK) ut recta AB ad AD.

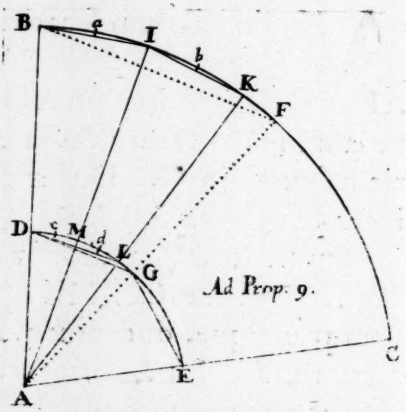


Eſt enim chorda BK ad chordam DL ut AB ad AD. Eſt etiam ut duæ chordæ BI, IK ad duas chordas BM,ML, ita AB ad AD. Sed duæ chordæ BI, IK ſunt, per conſtructionem, æquales

K duabus

duabus chordis DG,GE. Quare duæ chordæ DG,GE ſunt ad duas chordas DM,DL, ut AB ad AD. Sed ut duæ chordæ *DG,GE* ad duas chordas *DM,DL*, ita eſt totus arcus *DE* ad arcum *DL*; quod ſic oſtendo.

Si biſariam ſecentur arcus *BI* & *IL* in *a* & *b*, item arcus *DM, ML* biſariam in *c* & *d*; & ducantur biſegmentorum chordæ in arcu *BK*; item chordæ biſegmentorum in arcu *DL*; erunt illæ quoq; ut *AB* ad *AD*; & ſemper ita erunt ſi biſegmenta biſegmentorum procederent in infinitum. Idem quoq; verum eſt in biſectionibus areuum *KC*,& *LE*. Sed chordæ biſegmentorum numero infinitorum æquales ſunt ipſi arcui. Nam ſi omnes chordæ minores eſſent omnibus ſuis arcubus, poſſet biſectio adhuc procedere; quod eſt contra ſuppoſitum.



Eſt ergo tam arcus *DE* ad arcum *DL*, quam arcus *BC* ad arcum *BK*, ut data *AB* ad datam *AD*, & ita quoq; angulus datus BAC ad BAK. Eſt ergo angulus datus BAC ſectus in K, in data ratione AB ad *AD*. Quod erat faciendum.

PROP.

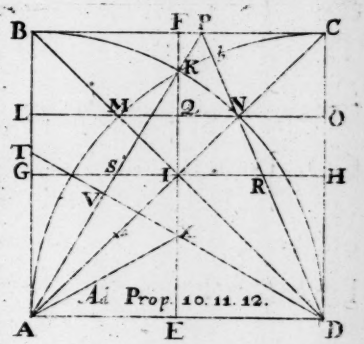
Prop. X.

De ſinubus, ſubtenſis, aliiſq; lineis in quadrante Circuli.

TAngens arcus graduum $22\frac{1}{2}$ eſt æqualis exceſſui quo diagonalis quadrati latus ſuperat.

Sit quadratum ABCD, in eoq; inſcriptus arcus quadrantalis BD ſecans diagonalem AC in N. Itaq; AN æqualis eſt lateri AB. Dico MC æqualem eſſe Tangenti arcus $22\frac{1}{2}$.

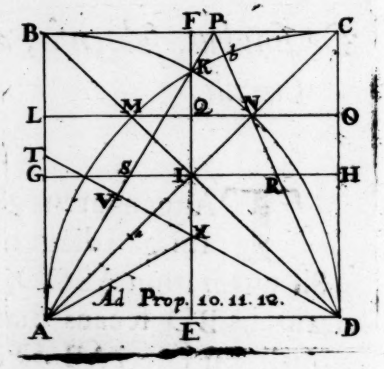
Deſcribatur arcus quadrantalis AC ſecans diagonalem *DB* in M. Ducta ergo MN erit parallela lateri BC; & producatur MN utrinq; ad latera *AB*, *DC* in L & O. Erit ergo *DO* æqualis ſinui arcus graduum 45, ſive ſemidiagonali *DI*. Secetur quadratum *ABCD* a rectis *EF*, *GH* concurrentibus in *I*, quadrifariam. Eſt ergo *DO* media proportionalis inter latus totum *DC* & ejus dimidium *DH*. Quare ut *DC* ad *DO*, ita eſt



DO

DO ad *DH*; & ita differentia *CO* ad differentiam *OH*.

Sunt autem *CO*,*NO* æquales, propter angulos ad *C* & *N* ſemirectos. Quare *NC* poteſt duplam *CO*; etiam *CO* poteſt duplam *OH*; cum enim latus *DC* poteſt duplam *DO*, & ſunt *DC*, *DO*, *OH* continuè proportionales, poterit *CO* duplam *OH*. Sunt ergo etiam *HO*,*OC*,*NC* continuè proportionales, quia *NC* poteſt duplam *CO*.



Ducatur chorda *DN*; itaq; angulus *ODN* erit angulus graduum $22\frac{1}{2}$. Secet autem chorda *DN* rectam *CH* in *R*, & erit *HR* æqualis *HO*.

Quoniam ergo *RH*, *NO*, *NC* ſunt continuè proportionales in ratione lateris DC ad DO, producta chorda DN ad latus *DC* in *P* abſcindet partem CP æqualem rectæ NC, id eſt exceſſui diagonalis ſupra latus Quare Tangens arcus graduum $22\frac{1}{2}$ æqualis eſt exceſſui, &c. *Quod* erat demonſtrandum.

Corol. Sequitur hinc rectam BP æqualem eſſe duplæ CO. Nam ſi centro C, intervallo CD ducatur arcus ſecans CA in *a*, erit *a*N dupla IN, & A*a* æqualis NC Cum ergo *a*C, & BC ſint æquales, erit quoq; *a*N, id eſt dupla CO æqualis BP.

PROP.

Prop. XI.

Tangens arcus 30 graduum una cum Tangente arcus graduum $22\frac{1}{2}$. Sunt æquales quadrati lateri BC.

Dividatur arcus MC bifariam in *b*. Erit ergo uterq; arcus C*b*, *b*M graduum $22\frac{1}{2}$, & D*b* tranſibit per N.

Eſt autem MK tertia pars, id eſt duæ ſextæ arcus CM. Cum ergo MK ſit tertia pars MC, M*b* dimidia, erit arcus MK duplus arcus K*b*.

Ergo angulus BDK eſt ſexta pars anguli CDM, id eſt pars recti duodecima.

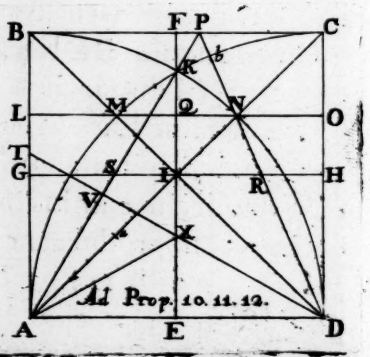
Producatur D*b* ad latus BC in P.

Quoniam igitur angulus AKD eſt duæ tertiæ, id eſt octo duodecimæ unius recti & angulus KDP una duodecima; ſi producatur AK, donec occurrat productæ D*b*, incidet illa in P. Nam ubicunq; incidit in D*b*, productam faciet cum illa angulum æqualem ſeptem duodecimis recti, propterea quod angulus KAB æqualis eſt octo duodecimis, & angulus KDP uni duodecimæ; erit enim reliquus angulus KPD ſeptem duodecimæ unius recti. Cum enim angulus CPD ſit novem, & angulus quem facit tangens 30 graduum cum ſua ſecante ſit octo, reliquus angulus erit complementum ad duos rectos, id eſt ad tres angulos BPA, APD, CPD.

Cum ergo angulus CPD ſit novem, & angulus DAK octo duodecimæ, erit reliquus angulus APD ſeptem,& omnes ſimul viginti quatuor duodecimæ unius recti, id eſt æquales duobus rectis, id eſt tribus angulis trianguli APD. Quare tangens 30 graduum, &c. quod erat demonſtrandum.

An. *Confutata jampridem eſt hæc propoſitio ab Walliſio ex tabulis Sinuum, Secantium & Tangentium, ſummorum Geometrarum ſumma cura calculatis. Utrum Hobbio an illis credendum ſit, tua Lector conſideratio eſt.*

Sequitur hinc BM, MN, NC, CP, KS, eſſe inter ſe æquales. Cum enim unaquæq; earum dupla ſit rectæ HO vel IQ, æquales erunt inter ſe. Præterea BP dupla eſt GS. Manifeſtum enim eſt ex eo quod AB dupla eſt AG. Unde rurſus apparet BP eſſe Tangentem 30 graduum. Nam AS, quæ manifeſtè æqualis eſt Tangenti 30 graduum, dupla eſt GS.



PROP.

Prop. XII.

Recta quæ trianguli æquilateri baſem AK ſecat a quovis vertice bifariam, ſeſquialtera eſt Tangentis arcus 30 graduum.

Sumatur in AB Tangens arcus 30 graduum AT. Jungatur DT ſecans AK in V, & rectam EK in X, & ducatur AX. Erit ergo triangulum ATX æquilaterum. Eſt ergo angulus AVD, ut & angulus KVD rectus; erunt etiam latera AX, XD æqualia. Eſt autem TX dupla VX. *Quare* DV eſt tripla VX, id eſt ſeſquialtera DX, id eſt Tangentis 30 graduum. *Quod* erat demonſtrandum. Eadem propoſitio demonſtratur *Elem.* 14. ad *Prop.* 18. ſed quia longior eſt quam ut huic loco conveniat, legatur ab eo qui dubitabit de veritate ejus.

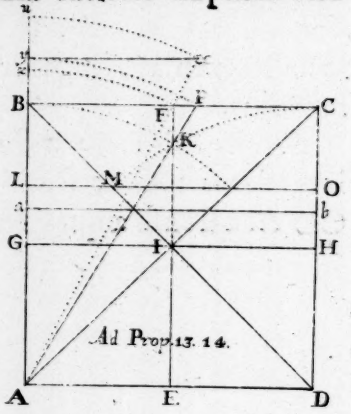
Corol. Eſt ergo recta DV vel EK tripla differentiæ inter latus DC & ſemidiagonalem DI vel DO. Nam CO eſt oſtenſa æqualis dimidiæ Tangenti AT.

Prop. XIII.

Differentia inter majus & minus ſegmentum rectæ diviſæ extrema & media ratione, dupla eſt differentiæ inter eandem rectam, & eam quæ potentia eſt ad ipſam ut 5 ad 4.

Sit data recta AB, cui ponatur ad angulos rectos BF ſemiſſis datæ AB. Ergo ductæ AF potentia, eſt ad potentiam datæ ut 5 ad 4, & ad potentiam BF ut 5 ad 1. Intervallo AF deſcribatur arcus circuli ſecans AB productam in z. Potentia ergo rectæ Az eſt ad potentiam datæ AB ut 5 ad 4, & ad potentiam BF ut 5 ad 1.

Dico differentiam inter majus & minus ſegmentum datæ AB diviſæ extrema & media ratione duplam eſſe Bz.



Dividatur AB bifariam in G. Dempta ergo AG a tota Az, reliqua Gz eſt majus ſegmentum datæ AB diviſæ extrema & media ratione, per *El.* 13. *Prop* 1. A puncto A in AB ſumatur A*a* æqualis Gz. Quoniam igitur tum AG, GB, tum A*a* Gz ſunt æquales, etiam G*a* Bz ſunt æquales. Et quia

A*a*

Aa est majus segmentum, segmentum minus erit aB. Major ergo est Gz segmentum majus quam aB segmentum minus, duabus rectis Bz Ga inter se æqualibus, id est dupla Bz. Differentia ergo inter majus & minus segmentum dupla est, &c. Quod erat demonstrandum.

Prop. XIV.

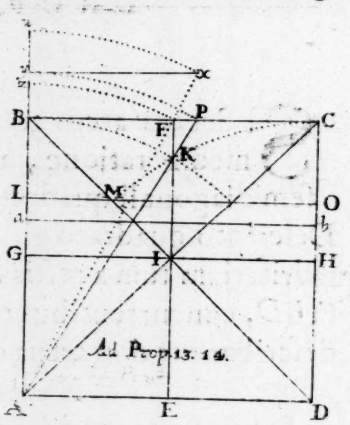
SI Secans arcus 30 graduum secetur extrema & media ratione, majus segmentum erit æquale semidiagonali quadrati a semidiametro.

Descripto quadrato ab *AB*, nempe *ABCD*, & diviso quadrifariam tum a rectis *EF*, *GH*, tum a diagonalibus *AC*, *BD*, concurrentibus omnibus in centro quadrati ad I, describantur duo arcus quadrantales *AC*, *BD*, secantes diagonales in *M* & *N*, & rectam *FE* in *K*. Ducatur *AK* & producatur ad latus *BC* in *P*. Est ergo *AP* Secans arcus *BK*, qui est arcus graduum 30. Est autem *BP* Tangens 30 graduum, & ipsius Secantis dimidia.

Per puncta *M* & *N*. Ducatur recta *LO* æqualis & parallela lateri *BC*. Quare *AL*, vel *DO* æqualis est semidiagonali *AI*.

Dico *AL* esse majus segmentum Secantis *AP* divisæ extrema & media ratione.

Intervallo *AP* describatur arcus circuli *Py* secans *AB* productam in *y*. A puncto *y* ducatur *yx* parallela lateri *BC*, & æqualis dimidiæ Secanti *AP*, id est æqualis Tangenti *BP*. Ducta ergo *Ax* potest quintuplum rectæ *yx*. Intervallo *Ax* describatur arcus circuli *xu* secans *AB* productam in *u*. Quare (per *Elem.* 13. *Prop.* 1.) Dempta *yx* (id est *BP*) a tota *Au*, reliqua erit majus segmentum rectæ AP (sive Az) divisæ extrema & media ratione. Dempta autem *yz* sive BP ex A*u*, reliqua erit AL æqualis semidiagonali AI. Ostensum enim est Prop. 10. rectam BP duplam esse rectæ CO sive BL. Itaq; *u*L est æqualis *yx* vel BP ; & reliqua AL majus segmentum Secantis AP, sive rectæ A*y* divisæ extrema & media ratione. Quod erat demonstrandum.



Cor. Sequitur hinc semissem diagonalis AI esse majus segmentum dimidiæ Secantis AP, id est Tangentis 30 graduum, id est lateris cubi inscripti in circulo cujus diameter est AB.

PROP.

Prop. XV.

Digreßio de diſcordia inter calculum linearum, ſuperficierum, & numerorum in demonſtrationibus Geometricis.

Per *Elem. 5. Def. 5*, Rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ poſſunt multiplicatæ ſeſe mutuò ſuperare.

Ex qua definitione manifeſtum eſt, Lineas, Superficies, & Solida nullam habere poſſe inter ſe rationem. Nam multiplicata nunquam ſe mutuo ſuperare poſſunt.

Si tamen pro Linea uſurpetur minutum rectangulum, poterit quidem aliquando inveniri ratio inter ſuperficem & rectangulum illud etſi minutiſſimum; nempe quando duo quadrata ſunt inter ſe ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Quia comparari poſſunt, & alter alterius eſſe menſura.

Sed quadrata quæ ſunt inter ſe ut quadrati numeri multo pauciora ſunt quam quæ non ſunt ut numeri quadrati; etſi utraq; ſunt innumerabilia.

Doctrina ergo de quantitate Linearum eſt ſcientia per ſe ſubſiſtens, & diſtincta a ſcientia Superficierum;

& hæc distincta a scientia Solidorum.

Deinde quia mensuratio omnis incipit a puncto, punctum autem considerari non potest ut figuratum, quomodo potest punctum in quadrati angulo aliter considerari quam ut quantum aliquod quadrato & ejus lateri commune? Consideraretur enim ut figuratum & non figuratum absurdè.

Præterea quomodo potest punctum quod est in centro circuli haberi pro nihilo, cum sit divisibile? Nam diviso quolibet sectore in partes quotcunque, in totidem dividetur etiam centrum.

Dicet forte aliquis, sine cognita quantitate figurarum pauciſſima fore Theoremata de ratione Linearum demonstrabilia, præterquam mensuratione mechanica. Sed errant, primò quia rationes Linearum inter se, & figurarum constructiones, & passiones omnes traduntur ab Euclide sine cognita aut quadrati aut cujuscunq; figuræ quantitate aut ratione figuræ ad figuram. Nec quisquam tentavit longitudinem lineæ per magnitudinem quadrati demonstrare ante Archimedem; nec post illum (quod scio) præter Eutocium, ante Copernicum, nec ille quidem demonstravit accuratè.

Neq; hæc dico quod mechanicas operationes pro legitimis demonstrationibus admissas velim. Sed in omni quæstione Geometrica multo prudentius esse existimo, ante Mechanicè mesurando magnitudinem quæsitam quantum potest fieri veritate proximam assequi, & deinde causam inquirere propinquitatis, quæ inventa veritatem

tatem aut falſitatem deteget, quam temerè credens incertæ Logicæ vel Logiſticæ ſuæ, vel authoritati aliorum, ea quæ neſcias pronunciare, præſertim ubi non unius tantum, ſed multorum Theorematum certitudo labefactari poſſit. Multo credibilus pronunciat a menſura Menſor diligens, quam qui a falſis ratiocinatur Principiis; & Algebriſtam, id eſt Arithmeticum contra menſuratum diſputantem, dicentemq; idem eſſe latus quadrati & radicem numeri merito irridebit.

Etiam ſtudioſum veritatis nemo illum putabit qui concluſionem videns ſententiæ ſuæ contrariam, fultam tamen veriſimilibus ſaltem argumentis, contentus ſit pugnare contra ſolam demonſtrationem (quæ aliquando a debilitate procedit ſui ipſius ingenii, vel ab omiſſione alicujus propoſitionis quam demonſtrator ſuppoſuerat Geometris, præſertim profeſſis eſſe cognitam) neglecta rei veritate. Nam hujuſmodi mores non ſunt quærentium veritatem ſed victoriam.

Quæ dixi de linearum & ſuperficierum incongruentia clarius apparebunt in ſequente Problemate propoſito ad Algebriſtas.

Prop. XVI.

Deſcribatur quadratum ABCD, & dividatur tum a rectis EF, GH, tum a diagonalibus AC, BD concurrentibus in I quadrifariam.

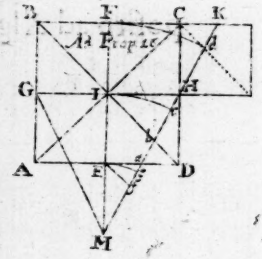
In FC producta ſumatur FK æqualis dimidiæ MF, jungaturq; MK, quam radio MF deſcriptus arcus F*d* ſecet in *d*; ut ſint MF, M*d* æquales. Secet autem MK rectam ED in *a*, & diagonalem ID in *b*. Tranſibit autem MK per H.

Ducatur E*f* parallela ID ſecans MK in *f*. Deinde radii ME, MI deſcribantur arcus E*e*, I*c* ſecantes MK in *e* & *c*.

His conſtructis manifeſtum eſt, primò M*a*, *a*H, HK eſſe inter ſe æquales.

Secundò (quia MI eſt dupla ME) M*b* eſſe duplam M*f*.

Tertiò, (quia ME eſt dupla E*a*) M*f* eſſe duplam *fa*; & (quia MI eſt dupla IH) H*b* eſſe duplam *ba*; & eſſe tum H*a* ad H*b*, tum M*a*, ad M*f* ut 3 ad 2, ſive 9 ad 6.



Quartò, manifeſtum eſt tum K*d* tum *ba* eſſe ad *ae*, ut 3 ad 1, & ad H*c* ut 3 ad 2, atq; ita etiam eſſe F*a* ad

ae,

æ, nempe ut 3 ad 2, ſive 9 ad 6; & propterea junctam C*d* eſſe parallelam ID; & proinde *d*H, H*b* eſſe æquales.

Quintò, manifeſtum eſt M*f*, *f b* eſſe æquales, & *b*K, *da* æquales.

Eſt ergo M*d* quater duo, quorum MK eſt ter tria.

Quare MK eſt ad M*d* ſive MF ut 9 ad 8.

Quoniam igitur MK quintuplum poteſt FK ſive M*b*, ſi detrahatur FK a recta MK, reliqua *b*K (per *El.* 13. *Prop.* 1.) erit majus ſegmentum diviſæ MK ſive M*d* extrema & media ratione.

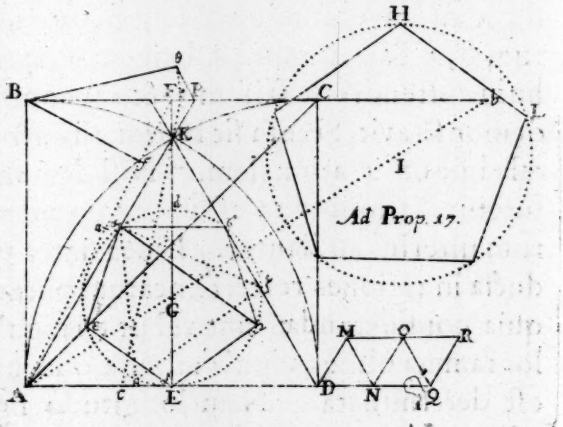
Sed *b*K æqualis eſt *da*. Quare *da* eſt majus ſegmentum diviſæ M*d* extrema & media ratione.

Cum ergo MK ſit 9, quorum M*d* eſt 8, & M*a* 3, erit *da* 5. Atq; ita tota M*d*: ſegmentum ejus majus *da*: ſegmentum ejus minus M*a*, erunt in ratione numerorum 8, 5 & 3; quod ad finem propoſitionis ſecundæ hujus oſtendi eſſe falſum; & eſt contra Euclidem, qui demonſtravit, Si tota ſit Rationalis utrumq; ſegmentum eſſe lineam irrationalem. Niſi demonſtratio hæc confutetur, rationis non eſt ut arguentes a poteſtate linearum ulterius audiantur. Linea inter parallelas obliquè ducta in rationes referri linearum purarum nulla debet; quia conſiderandæ ſunt vel ut triangula, vel ut parallelogramma obliquangula minuta, quorum longitudo non eſt determinata. Nam longitudo figuræ nullæ certa eſt præter eam quæ vocatur Altitudo.

Prop. XVII.

Latus Icoſaedri æquale eſt tertiæ parti ſemicirculi in ſua Sphæra maximi.

Deſcribatur quadratum ABCD, & dividatur bifariam a recta EF parallela lateribus AB, DC. Deſcribatur quadrans ABD cujus arcus ſecet rectam EF in K. Juncta AK producatur ad BC in P. Eſt ergo BP tangens 30 graduum; cui addita P*b* æquali lateri BC, tota B*b* compoſita erit ex latere & tangente 30 graduum. Ducatur etiam diagonalis AC quam recta EF ſecat bifariam in *i*.



Jungatur DK, eritq; A K D triangulum æquilaterum.

In latere AD ſumatur A*c* tertia ejus pars, jungaturq; *c*K, & producatur ad latus BC in *e*; eritq; F*e* tertia pars FP, & propterea erit B*e* tertia pars totius B*b* per *Conſect.* 3. Septimæ hujus.

In

In rectis KA, KD sumantur $K\alpha, K\varepsilon$ utraq; æqualis quartæ parti diagonalis AC, sive dimidiæ Ai, jungaturq; $\alpha\varepsilon$. Erit igitur triangulum $K\alpha\varepsilon$ æquilaterum ; basis autem ejus $\alpha\varepsilon$ secabitur a recta KE bifariam, & ad angulos rectos.

Ex rectæ BP, quæ est Tangens 30 graduum, & ex duabus rectis quarum utraq; sit æqualis $\alpha\varepsilon$, fiat triangulum $\alpha\varepsilon\gamma$; & erit $\varepsilon\gamma$ æqualis $\alpha\varepsilon$.

Per tria puncta $\alpha, \varepsilon, \gamma$, describatur circulus cujus centrum sit G, semidiameter $G\varepsilon$ vel $G\alpha$.

Quoniam autem EF sive AB diameter Sphæræ est ad BP, id est ad $\alpha\gamma$ potentia ut 3 ad 1 erit $\alpha\gamma$ latus Cubi inscripti in Sphæra cujus diameter est EF. Et quoniam (per propositionem hujus 14) quarta pars diagonalis est majus segmentum lateris Cubi divisi extrema & media ratione ; erit (per *El.* 13. *Prop* 8.) recta $\alpha\varepsilon$ latus Pentagoni in circulo $\alpha\varepsilon\gamma$; & ipsum Pentagonum una ex duodecem sedibus Dodecaedri in eadem cum Icosaedro Sphæra inscripti.

Compleatur Pentagonum $\alpha\varepsilon\gamma\delta\iota$.

Ducatur recta AF secans arcum AKC in *f* ; eritq; (ut satis notum est Geometris) B*f* quintæ partis lateris AB, sive diametri Sphæræ potentia quintupla.

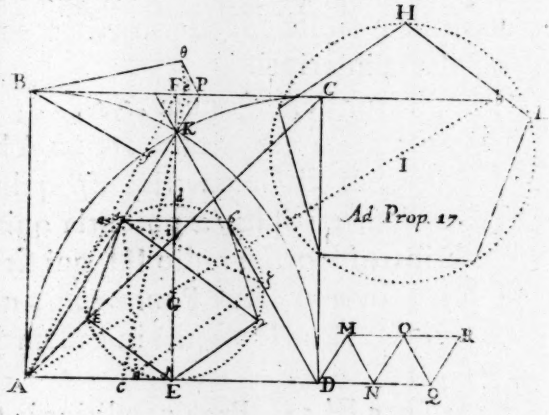
Describatur seorsim radio IH, qui sit æqualis B*f*, circulus HL, in quo latus Pentagoni æquilateri sit HL. Erit ergo HL latus Icosaedri in eadem Sphæra, per *El.* 13. *Prop* 16.

Ergo (per *El.* 14. *Prop.* 5. editionis Clavianæ) recta

HL eſt latus trianguli æquilateri inſcripti in eodem circulo. Inſcribatur in circulo αεγδ triangulum æquilaterum αζ. Erit igitur αζ latus Icoſaedri in Sphæra cujus diameter eſt EF.

Oſtendendum eſt rectam αζ æqualem eſſe tertiæ parti ſemicirculi a ſemidiametro BF; id eſt arcui BK, quæ pars eſt tertia quadrantis circuli deſcripti ab AB ut ſemidiametro.

Semidiametro BP deſcribatur arcus Pθ, in quo ſumatur Pθ æqualis arcui γζ. Ducta ergo Bθ æqualis erit αγ, id eſt lateri Icoſaedri in Sphæra cujus diameter eſt EF. Radio ergo Bθ deſcriptus arcus circuli ſecans BP dabit latus Icoſaedri; quod latus ſi ſit ipſum Be, erit tertia pars rectæ Bb, id eſt tertia pars arcus AC ſive ſemicirculi ſuper diametro EF. Ut manifeſtum eſt ex Conſectario 3. Prop 7.



Ratio ergo reddenda eſt quare αγ ſive Bθ æqualis debeat eſſe tertiæ parti arcus AC, id eſt arcui CK. Quæ quidem ratio facilius reddi poſſet ab intuitu ipſius I-

coſa-

coſaedri ſolidi. Sed quoniam in plano exponi non poteſt, proximum eſt, ut deſcribamus quatuor triangula quorum viginti faciunt Icoſaedri ſuperficiem, & ea poſitione qua Clavius ea diſponit, ad finem *Prop.* 16. *El.* 13. Sunt ergo illa triangula *DMN*, *MNO*, *NOQ*, *QOR*.

In ea figura ſit Sphæræ polus *D*. Erunt ergo puncta *D*, *M*, *N*, *O*, *Q*, *R* in ſuperficie Sphæræ concava ; & propterea rectæ *MN*, *NO*, *OQ*, non erunt in eodem plano cum punctis *D* & *R*, quæ ſunt in plano per diametrum Sphæræ.

Quare latus Icoſaedri procedit a polo *D* ad polum *R* per quinque rectas æquales, nimirum a *D* ad *M*, ab *M* ad *N*, ab *N* ad *O*, ab *O* ad *Q*, a *Q* ad *R*. In motu autem primò a *D* ad *M* promovetur verſus *R*. Rurſus ab *M* ad *N* non promovetur verſus *R*. Tertiò ab *N* ad *O* promovetur quantum a *D* ad *M*. Quartò ab *O* ad *Q* non promovetur verſus *R*. Quintò a *Q* promovetur ad ipſum punctum *R*. Itaq; per quinque rectas æquales, quæ latera ſunt Icoſaedri, fit motus a polo ad polum. Sed propter digreſſionem ad circulos proximos, qui dividunt ſuperficiem Sphæræ quinquifariam motus fit per quinque latera Icoſaedri. In ſemicirculi autem circumferentia fit motus a polo ad polum per tres arcus æquales ſingulas arcui CK vel BK. Ablato igitur motu qui fit per duo latera Icoſaedri nihil promoventia, viæ per tria latera Icoſaedri, & per tres arcus ſemicirculi, æquales ſingulas arcui CK, vel ſaltem per illorum chordas,

chordas, æquales erunt. Sed BI per menſuram invenietur major chorda BK. Quare tres arcus, ſinguli æquales BK ſunt æquales tribus lateribus Icoſaedri, & unus uni. Quod erat demonſtrandum.

Hoc genus demonſtrationis damnabunt (certè ſcio) Algebriſtæ & fortaſſe alii, qui non admittunt in Geometriam argumenta a motu ſumpta, neq; a menſura. Sed ad hanc, & multas alias propoſitiones Geometricas principia alia nulla excogitari poſſunt, a quibus concluſio certa derivari ritè poteſt. Numeri enim ad hanc rem (ut ſæpe demonſtravi) inepti ſunt; nec a ſuperficiebus ad longitudines, nec contra, procedi rectè poteſt; propterea quod ſuperficies & longitudines ſunt diverſa genera quantitatum.

Prop. XVIII.

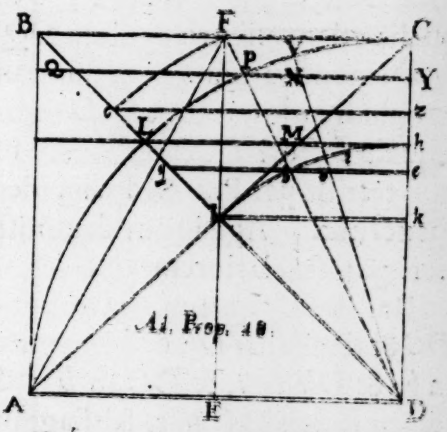
Circulo dato æquale invenire quadratum.

Sit datus circulus cujus quadrans ſit DAC quadrato ABCD inſcriptus; & octans circuli DLC. Secetur quadratum ABCD tum a diagonalibus AC, BD tum a rectis EF, GH, concurrentibus omnibus in I quadrifariam; ducaturq; DF ſecans arcum CL in P, & per punctum P ducatur ΥQ ſecans diagonalem *BD* in Q; eruntq; $D\Upsilon$, ΥQ æquales.

Radio *DF* deſcribatur arcus F*c* ſecans diagonalem *BD* in *c*, ut ſint *DF*, *Dc* æquales. Dico

Dico quadratum ab ΥQ, vel $D\Upsilon$ æquale esse superficiei octantis circuli DCL.

A puncto c ducatur cZ parallela $Q\Upsilon$ secans DC in z. Est ergo Zc (per *Prop. 6. hujus*) semissis arcus AC, & propterea æqualis arcui CL. In arcu CL sumatur arcus LV æqualis CP, jungaturq; DV secans ΥP in X; eritq; trilineum $CP\Upsilon$ totum intra Sectorem DCL; trilineum autem PQL totum extra sectorem eundem.



Sunt autem ambo trilinea simul (ut antehac ostendi, & nunc ostendam) æqualia sectori APV. Quoniam enim recta BC secta est bifariam in F, & triangulorum DCB, $D\Upsilon Q$ bases sunt parallelæ, etiam basis ΥQ secta est bifariam in P; & triangula $D\Upsilon P$, DPQ æqualia sunt.

Jam DPL plus PQL plus $CP\Upsilon$ sunt æqualia DVL sive DCP (quia DPL plus PQL est æquale DYP.) Nam DCV plus DVP æquale est DCP sive DVL.

Quare DPL plus PQL plus CYP æquale est DCV plus DVP.

Ablatis igitur utrinq; æqualibus DPL, DCV, restat

PQL plus CYP æquale ſectori DVP. Et hactenus aſſenſere adverſarii. Conceſſere hoc quoque (nam manifeſtum eſt) quod ſi CYP, PQL ſunt inter ſe æqualia, æqualia etiam eſſe triangulum DQY & ſectorem DCL.

Demonſtratum autem putaram, ante ex eo quod triangulum cujus vertex ſit D & baſis parallela lateri BC, æquale ſectori DCL nullum conſtitui poteſt cujus baſis non tranſit per P. Sed vim demonſtrationis non perſpexerunt. Age igitur demonſtrationem afferamus, ſi fieri poteſt, clariorem.

Radio DI, quæ media proportionalis eſt inter latus DC & ſemilatus Dk deſcribatur arcus circuli ſecans DF in b, & DV in i, & DC in h ; & per punctum b ducatur eq ſecans DC in e, & diagonalem BD in q & DV in o. Erit ergo tum ſector DCP duplus ſectoris Dhb, tum quadrilinei CPbh ; item triangulum DXY duplum tum trianguli Dbe tum quadrilinei YXoe. Quare ſector reliquus DVP duplus eſt tum trilinei CYP, tum quadrilinei VPbi. Et Dbi duplus trilinei hbe.

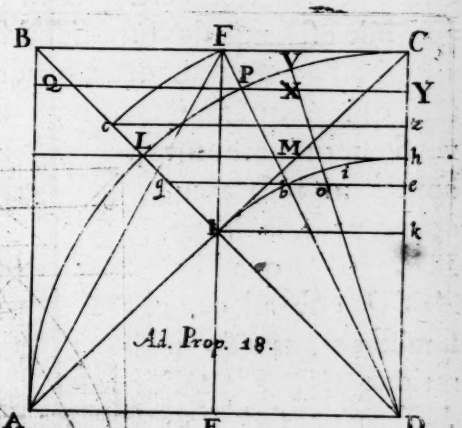
Cum ergo ſector DVP duplus ſit trilinei CYP, idemq; æqualis duobus trilineis CYP, PQL ; erunt CYP, PQL æqualia inter ſe. Quod erat demonſtrandum.

Inventum ergo eſt quadratum (nempe quadratum ab YQ) æquale octanti circuli, nempe ſectori DCL ; atq; adeo effecta eſt quadratura circuli, nec nunc primum, ſed multis abhinc annis, diverſis methodis ſatis demonſtrata.

Ex hac demonſtratione deduxi etiam duplicationem cubi, oſtendens quatuor rectas CB, Zc, eq, & Ik eſſe con-

continuè proportionales. Sed neque hoc intellexerunt Algebriſtæ. Objicit enim Profeſſor Savilianus, Quod rectæ CB, YQ, Zc non ſunt continuè proportionales. Eſſent enim etiam *BD*, *DQ*, *DC* proportionales. Suppoſito, inquit, diviſam eſſe BC quinquifariam, quadratum ejus eſt 25, & quadratum a *BD* (cum ſit ejus duplum) 50. Quadratum a *DQ* 40; quadratum a Dc 32; & proinde quadratum Zc 16 viceſimæ quintæ totius quadrati ABCD. Sed quadratum a Zc eſt 10 decimæ ſextæ quadrati ABCD. Sed 16 vicemæ quintæ & 10 decimæ ſextæ non ſunt æquales. Non ſunt ergo *CB*, *YQ*, *Zc* proportionales.

Sed ejuſmodi argumenta (propter cauſas ad *Prop.* 15. declaratas) meræ ſunt ſpiritus Algebrici præſtigiæ, numeros applicantis quantitatibus quæ numeri ad numerum non habent rationem.



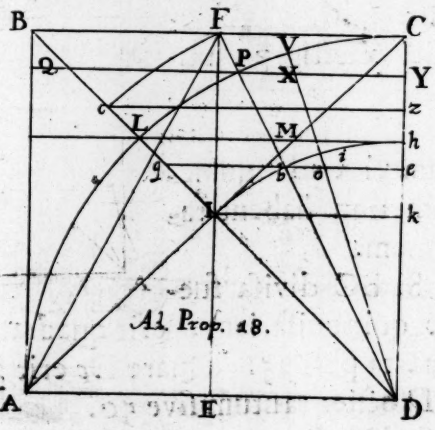
Si BC diviſa fuerit quinquifariam, erit quadratum a BF $6\frac{1}{4}$, nempe quarta pars 25. Quare Dc erit $31\frac{1}{4}$, & quadratum a *BD* octies tantum ſive 50.

Sed media proportionalis inter 8 & 5 erit latus (latus dico,

dico, non Radicem) numeri 40. Erunt ergo non modò 50, 40, 32, ſed etiam 50, 40, 31¼ continuè proportionales. Quæ cauſa ergo hujus diſcordiæ eſſe poteſt (cum perſpicue demonſtratum ſit, tum quod *Zc* eſt æqualis dimidio arcus AC, tum quadratum ab *YQ* æquale eſſe Sectori CL) niſi quod lineæ ductæ (id eſt diviſibiles ſecundum latitudinem) comparari cum lineis puris, id eſt ſine latitudine non poſſunt. Sed rectas CB, *Zc*, *eq*, *kI* eſſe continuè proportionales, demonſtratione ſequente clariſſime explicabo.

Conſectarium.

Arcus CL minor eſt quatuor quintis Radii DC. Omnes enim Sinus verſi quos in Quadrante DAC duci poſſibile eſt, æquales ſunt ſimul ſumpti areæ ipſius quadrantis, & per conſequens, quadrato *DYQM*, ſive quatuor quintis quadrati *ABCD*. Et ſiquidem Sinus illi verſi terminarentur omnes in ipſo arcu, deberent duo latera *BC*, *CD* quadrati *ABCD* eſſe ad duas ſemiſſes arcus *AC*, in ratione *CD* ad *DY* duplicata; ſed non eſt ita. Nam etſi diviſeris lineam vel aliam quantitatem continuam in æternum,



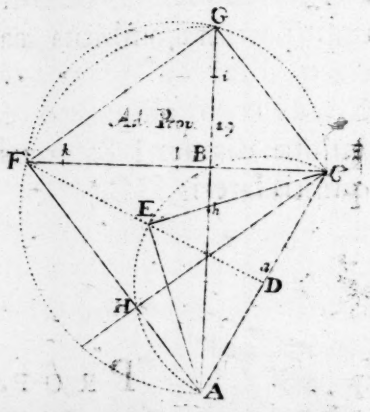
nun-

nunquam tamen pervenies ad Nihil ; quia quantitas continua divisibilis est in semper divisibilia. Sinus ergo, quibus universis impletur area quadrantis habebunt singuli suas latitudines, eruntq; semper numero finiti. Sunt autem hi sinus versi inter se Paralleli, quorum maximus DC est circuli radius cujus terminus ad C est arcus minutus. Est autem DC latus quadrati ABCD, & propterea (cum habeat latitudinem) erit rectangulum, & proinde majus quam radius DC. Pars ergo ejus extat extra circulum. Eadem est ratio cæterorum Sinuum versorum ; & siquidem secundum latitudinem divisi fuerint quoties dividi possunt, nunquam ad indivisibile pervenietur. Majus ergo est aggregatum partium ambitus rectangulorum extantium extra quadrantem quam aggregatum partium ipsius AC. Minus ergo aliquanto est arcus AC quam quatuor quintæ diametri & arcus CL sive Zc minor quatuor quintis lateris DC.

Prop. XIX.

INter rectam datam & ipsius dimidiam invenire duas medias proportionales.

Sit data AB, & dimidia ejus BC disposita ad angulos rectos, jungaturq; AC, & secetur AC bifariam in D. Centro D, radio DA describatur semicirculus, & dividatur bifariam in E. Ducantur AE, CE; & in producta CB ponatur BF æqualis CE. In producta AB sumantur duæ quintæ rectæ AB, quæ sit B*i*, & inter AB & B*i* inveniatur media proportionalis B*k*, cui in AB producta ponatur æqualis BG (quæ per supra demonstrata æqualis est duabus quintis arcus quadrantalis descripti ab AB) ducanturq; FG, GC. Deinde divisa CF bifariam in *l*, centro *l* radio *l*F describatur semicirculus per F & G, qui transibit per C; quod sic ostendo.



Recta AC, cujus quadratum est quintuplum quadrati BC, est media proportionalis inter arcum quadrantalem descriptum ab AB & ejus dimidium, ut ostensum est ad Prop. 6. Itaq; CE æqualis est dimidio arcui quadrantali descripto ab AB (nam propter angulum rectum ad E, CE est media inter ambas CE, EA & earum utramvis. Quare BF est æqualis dimidio arcus quadrantalis descripti ab AB. Est autem BG, ad BF & totam AB in ratione continua, tertia, per Prop. 7. Quoniam igitur arcus quadrantalis ab AB:

ipsa

ipſa AB : duæ quintæ arcus quadrantalis ab AB ſunt continuè proportionales, erit ut duæ quintæ arcus quadrantalis ab AB (ſive recta Bk) ad dimidiam AB, ita AB ad dimidium arcum quadrantalem ab AB. Eſt ergo ut AB ad BF, ita DG ad BC.

In arcu ABC applicetur a puncto A recta AH æqualis BC. Erunt ergo AB, CH æquales, & propterea arcus HE, EB, ſive anguli HCE, ECF æquales, & rectæ HF, BF, item CF, AF æquales, & DE producta dividet angulum AFC bifariam.

Similia ergo ſunt triangula ABF, GBC. Quare anguli BGC, BAF ſunt æquales, item anguli BCG, BFA æquales. Et (propter angulum CHA rectum, & CH æqualem AB) triangula ABF, FBG ſunt ſimilia & æqualia. Ergo æquales inter ſe ſunt tum BF, GC, tum CH (ſive AB) & FG.

Et diviſa AG bifariam in *h*, centro *h*, radio *h*A deſcriptus ſemicirculus tranſibit per *F*.

Rectangulum ergo eſt *FGCH*, & triangula *ABF*, *FBG* ſimilia. Eſt ergo ut *AB* ad *FB*, ita *FB* ad *BG*, & ita *BG* ad *BC*. Inventæ ergo ſunt *BF*, *BG* duæ mediæ proportionales inter datam *AB* & dimidiam ejus *BC*. Quod erat faciendum.

Cor.

Manifeſtum eſt ex præcedentibus, duarum mediarum majorem eſſe octantem, minorem duas quintas arcus quadrantis deſcripti ab *AB*. Item *AB* (ſive *CH*) æqualem eſſe *FG*; & *BG* æqualem eſſe illi parti rectæ

CH.

CH quam abscindit *AB* computandam a puncto *C*, quæ omnia ad oculos demonstrat Problematis Constructio.

Prop. XX.

De Centro Gravitatis Quadrantis Circuli.

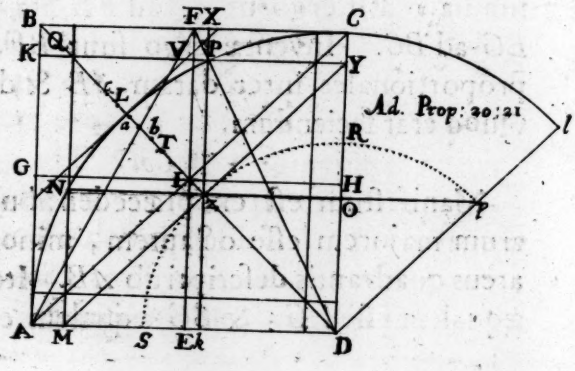
CEntrum Gravitatis quadrantis circuli est in recta e centro dividente arcum bifariam ; & distat a centro circuli tanto quanta est media proportionalis inter semidiametrum & duas ejus quintas.

Describatur quadratum ABCD, & in eo quadrans ADC, ducanturq; diagonales AC, BD, quarum BD secabit arcum AC bifariam in L.

Inveniatur inter semidiametrum DC, & duas ejus quintas media proportionalis *DR*, & radio *DR* describatur arcus quadrantis *RS* secans diagonalem *BD* in z.

Dico z esse centrum Gravitatis quadrantis *DAC*.

Secetur quadratum *ABCD* a rectis *EF*, *GH*, secantibus se mutuò & ad angulos rectos in *I*, quadrifariam. Jungatur *DF* secans arcum *AC* in *P* ;



&

& per *P* ducatur *YQ* parallela BC ſecans diagonalem *BD* in *Q*, & *EF* in *V*; compleaturq; quadratum *DYQM*, cujus latus *QM* ſecet arcum *AC* in *N*.

Ut ergo quadratum a *DF* ad quadratum *DP* vel *DC*, ita eſt quadratum a *DC* ad quadratum a *DY*. Eſt ergo quadratum *ABCD* 5 quorum quadratum *DYQM* eſt 4.

Jungatur *YM*, quæ dividet *DQ* bifariam. Ductæ item *PK*, *NO*, illa lateri AB, hæc lateri BC parallela, ſecabunt ſe mutuo & ad angulos rectos in medio rectæ *DQ*.

Quoniam igitur quadratum ABCD eſt ad quadratum *DYQM* ut 5 ad 4, erit quadratum a *DQ*, 8 quorum quadratum ab *YQ* eſt 4, & quadratum a *DC*, 5, & quadratum a dimidia *DQ*, 2.

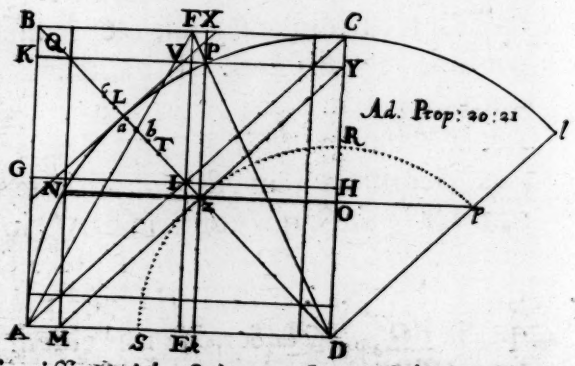
Quadratum ergo a dimidia *DQ* eſt duæ quintæ quadrati ABCD. Eſt ergo dimidia *DQ* media proportionalis inter ſemidiametrum *DC* & duas ejus quintas, & proinde æqualis *DZ*. Eſt autem *Z* centrum tum magnitudinis tum gravitatis quadrati *DYQM*; & punctum *I* centrum magnitudinis & gravitatis quadrati ABCD.

Oſtenſum autem eſt propoſitione 18 hujus, quadratum *DYQM*, & quadrantem DAC inter ſe eſſe æqualia & trilinea *CYP*, *PQL*, *AMN*, *NQL* eſſe inter ſe æqualia. Ergo ſi a quadrato *DYQM* auferantur duo trilinea æqualia *PQL*, *NQL*, & addantur eidem quadrato duo trilinea *CYP*, *AMN* ad æquales diſtantias a diametris æquilibrii, trilinea *CYP*, *AMN* æquiponderabunt; ſed di-

...MN, PQ, QN sunt æquales & æqualiter ...metris æquilibrii NO, Pk, item puncta Y, ... æqualiter distant a centro gravitatis totius, ...ur. Z centrum gravitatis quadrantis DAC. ...emonstrandum.

Consectarium.

...gravitatis semicirculi est media proportio... ...iter ...s & unam quintam arcus AC. Ostensum ... est (Prop. 5.) rectam quæ media est inter semi... ...metrum & duas ejus quintas æqualem esse duabus quintis arcus AC. Si igitur ZO producatur ad *p*, ita ut ZO, O*p* sint æquales, ducta D*p* erit *p*, centrum gravitatis quadrantis æqualis DAC. Quoniam autem punctum O dividit Z*p* bifariam, erit punctum O centrum gravitatis dupli quadrantis *DAC*, hoc est semicirculi radio *DC* descripti, & D*p* producta abscindet arcum C*l* æqualem arcui LC. Cum ergo quadrans DAC quiescat in Z, & duplus Sector C*l* quiescat in *p*, totus semicirculus quiescet in O. Sed ZO est media proportionalis inter DZ & ejus semissem, id est inter duas quintas & unam quintam arcus AC, propter triangulum DOZ rectangulum & æquicrurum.



PROP.

Prop. XXI.

CEntrum Gravitatis bilinei *ALCA* [illegible] gonali *BD*, distans a puncto B qu[illegible] gitudo Tangentis 30 graduum.

Inveniatur Tangens 30 graduum *BX*, cui a punc[illegible] B in diagonali BD sumatur æqualis BT. Dico punctum T esse centrum Gravitatis bilinei ALCA.

Quoniam enim quadratum ab AB est ad quadratum a BX, sive BT ut 3 ad 1, & quadratum a semidiagonali BI est dimidium quadrati ab AB, erit quadratum a BI ad quadratum a BT ut $\frac{3}{2}$ ad 1, id est ut 3 ad 2.

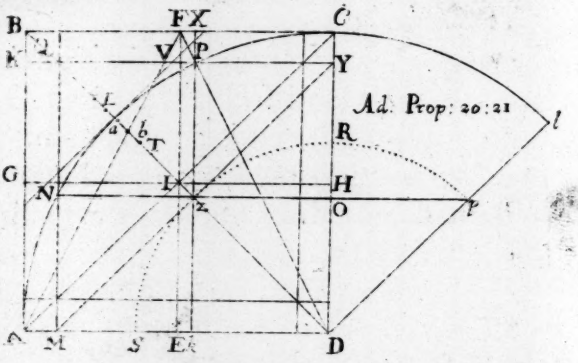
Est autem trilineum ABCLA ad bilineum ALCA ut 2 ad 3, quod sic ostendo.

Gnomon YBM est quinta pars quadrati *DYQM*, id est quinta pars quadrantis *DAC*. Quare etiam trilineum *ABCLA* est quinta pars, sive duæ decimæ quadrati ABCD. Est autem triangulum ABC dimidium sive quinque decimæ quadrati ABCD. Sed quadrans DAC est quatuor quintæ, sive octo decimæ quadrati ABCD. Est ergo bilineum ALCA tres decimæ quadrati ABCD.

Est igitur ratio trilinei ad bilineum eadem quæ 2 ad 3, id est reciproca rationis tum magnitudinum ALCA, ABCLA, tum quadratorum BI, BT. Jungatur AF

secans

secans diagonalem BD in *a*. Quoniam ergo AB est dupla BF, & angulus ABF a recta B*a* divisus bifariam, erit A*a* dupla *a*F. Est ergo punctum *a* centrum Gravitatis totius trianguli ABC.



Secetur *a*T bifariam in *b*, sumaturq; *ac* tripla T*b*, sitq; centrum libræ *a*. Erit ergo ut trilineum ABCLA, ad bilineum ALCA, id est ut 2 ad 3, ita reciprocè *ca* ad *a*T, nempe ut 3 ad 2. Est ergo T centrum Gravitatis bilinei ALCA, & punctum *c* centrum Gravitatis trilinei ABCLA. Quod erat demonstrandum.

FINIS.